Definición básica

Si f(t) está definida cuando t≥0, la integral impropia $\int_0^{+\infty} k(s,t)f(t)dt$ se define como un límite: $\lim_{b\to+\infty}\int_0^b k(s,t)f(t)dt$

Definición

Sea f una función definida para t≥ 0. Entonces la integral

$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, f(t)dt = \quad \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-st} f(t)dt = L\{f(t)\}$ se llama TRANSFORMADA DE LAPLACE de f, siempre y cuando la integral converja. Cuando s< 0, la integral es divergente.

Observación. Cuando la integral converge, el resultado es una función de s.

$$L\{f(t)\} = F(s); \qquad L\{g(t)\} = G(s); \qquad L\{Y(t)\} = Y(s)$$

Ejercicio

Evalúe $L\{1\}$

$$L\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}(1)dt = -\frac{1}{s}e^{-st} \quad /_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{s}[e^{-\infty} - e^0] = \frac{1}{s}$$

siendo s > 0

Transformación Lineal

Sean α y β constantes, entonces:

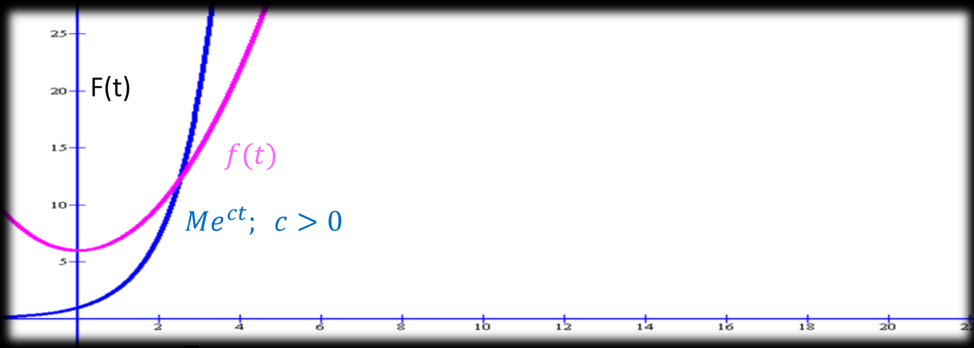
$$\int_0^{+\infty} e^{-st}[\propto f(t) + \beta g(t)]dt = \propto \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)dt$$

$$=\alpha.L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

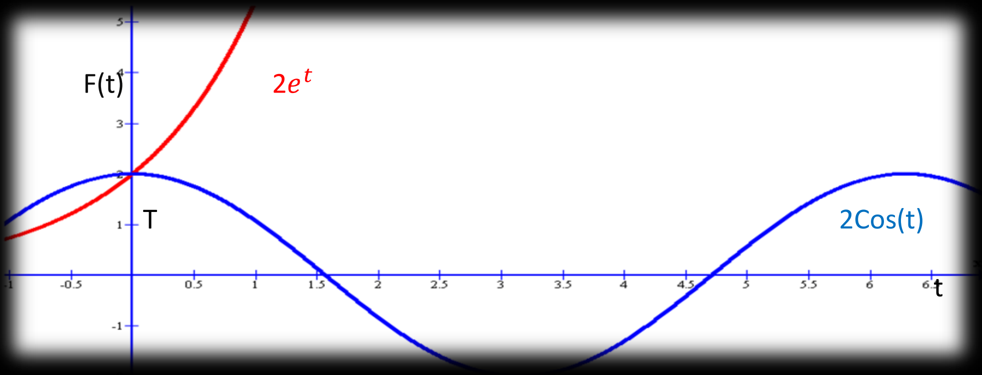
Se dice que L es una transformación lineal.

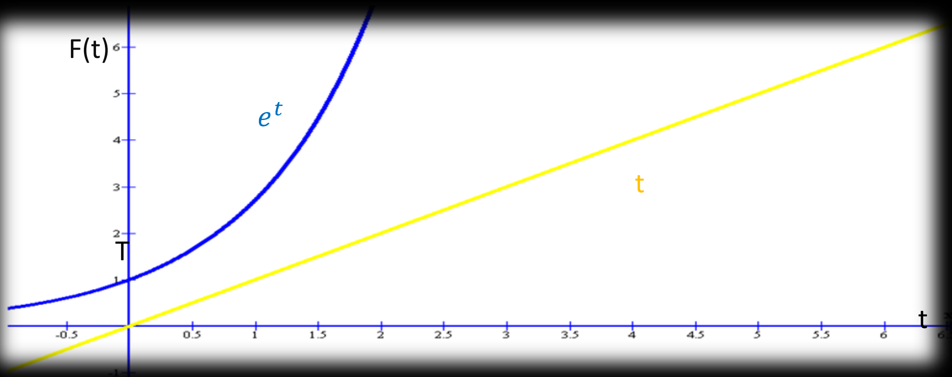
Orden Exponencial

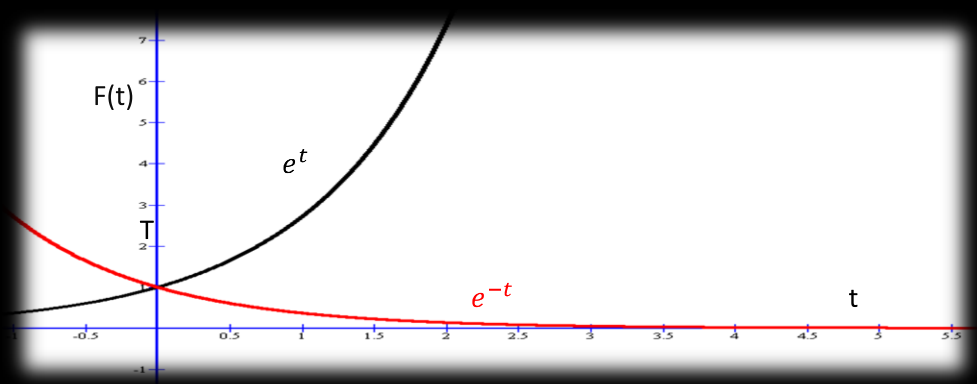
Se dice que una función f es de orden exponencial si existen constantes c, M> 0 y T> 0 tales que $|f(x)| \leq Me^{ct}$ para todo t > T.

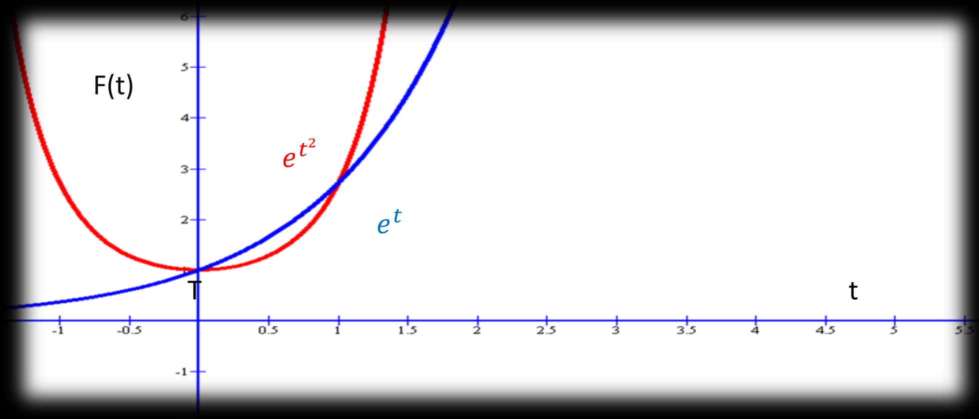


Observe que en todos los casos se cumple el orden exponencial donde t>T









Condiciones suficientes para la existencia

Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0, +\infty)$ y de orden exponencial c para t>T, entonces L$\{f(t)\}$ existe para s>c.

Ejercicios

1.- Evalúe L$\{t\}$

$$L\{t\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}.t.dt = -\frac{t}{s}e^{-st}\left\{\begin{matrix}+\infty\\0\end{matrix}\right. - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}dt$$

$$L\{t\} = \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s^2}e^{-st}\left\{\begin{matrix}+\infty\\0\end{matrix}\right. = -\frac{1}{s^2}[e^{-\infty} - e^0] = \frac{1}{s^2}$$

siendo s > 0

2.- Evalúe L$\{e^{-3t}\}$

$$L\{e^{-3t}\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,e^{-3t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(s+3)}\,dt =$$

$$L\{e^{-3t}\} = -\frac{1}{s+3}e^{-t(s+3)}\left\{\begin{matrix}+\infty\\0\end{matrix}\right. = -\frac{1}{s+3}[e^{-\infty} - e^0] = \frac{1}{s+3}$$

siendo s+3 > 0; s > -3

3.- Evalúe L$\{Sen(2t)\}$

$L\{Sen(2t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,Sen(2t)dt$ De acuerdo a Integración por partes;

$$L\{Sen(2t)\}=-\frac{1}{s}e^{-st}Sen(2t)\begin{cases}+\infty\\0\end{cases}-\int_0^{+\infty}-\frac{2}{s}e^{-st}Cos(2t)dt$$

$L\{Sen(2t)\}=\frac{2}{s}\int_0^{+\infty}e^{-st}Cos(2t)dt$ Aplicando otra integración por partes, tenemos:

$$L\{Sen(2t)\}=\frac{2}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}Cos(2t)\begin{cases}+\infty\\0\end{cases}-\int_0^{+\infty}\frac{2}{s}e^{-st}Sen(2t)dt\right]$$

$$L\{Sen(2t)\}=\frac{2}{s}\left[\frac{1}{s}-\frac{2}{s}\int_0^{+\infty}e^{-st}\,Sen(2t)dt\right]=\frac{2}{s}\left[\frac{1}{s}-\frac{2}{s}L\{Sen(2t)\}\right]$$

$$L\{Sen(2t)\}=\frac{2}{s^2}-\frac{4}{s^2}L\{Sen(2t)\}$$

$$L\{Sen(2t)\}+\frac{4}{s^2}L\{Sen(2t)\}=\frac{2}{s^2}$$

$L\{Sen(2t)\}\left[1+\frac{4}{s^2}\right]=\frac{2}{s^2}$ *entonces* $L\{Sen(2t)\}=\left[\frac{1}{1+\frac{4}{s^2}}\right]\left(\frac{2}{s^2}\right)$

$L\{Sen(2t)\}=\left[\frac{1}{\frac{s^2+4}{s^2}}\right]\left(\frac{2}{s^2}\right)=\frac{2}{s^2+4}$ siempre que s > 0

4.- Evalúe $L\{3t-5Sen(2t)\}$

$$L\{3t-5Sen(2t)\}=3L\{t\}-5L\{Sen(2t)\}=\frac{3}{s^2}-5\left[\frac{2}{s^2+4}\right]=\frac{3}{s^2}-\frac{10}{s^2+4}$$

$L\{3t-5Sen(2t)\}=\frac{3s^2+12-10s^2}{s^2(s^2+4)}=\frac{-7s^2+12}{s^2(s^2+4)}$ siendo s > 0

5.- Evalúe $L\{t\,e^{-2t}\}$

$$L\{t\,e^{-2t}\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}\,t\,e^{-2t}\,dt=\int_0^{+\infty}t\,e^{(-st-2t)}\,dt$$

$L\{t\,e^{-2t}\}=\int_0^{+\infty}t\,e^{-t(s+2)}\,dt$ integrando por partes queda:

$$L\{t\,e^{-2t}\}=-\frac{t}{s+2}e^{-t(s+2)}\begin{cases}+\infty\\0\end{cases}-\int_0^{+\infty}-\frac{1}{s+2}\,e^{-t(s+2)}\,dt$$

$$L\{t\,e^{-2t}\}=\frac{1}{s+2}\int_0^{+\infty}e^{-t(s+2)}\,dt=-\frac{1}{(s+2)^2}e^{-t(s+2)}\begin{cases}+\infty\\0\end{cases}=\frac{1}{(s+2)^2}$$

Siendo s+2 > 0; s >-2

6.- Evalúe $L\{t^2\,e^{-2t}\}$

$$L\{t^2\, e^{-2t}\} = \int_0^{+\infty} t^2\ e^{-2t}\ e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t(s+2)}\, dt$$

Integrando por partes tenemos:

$$L\{t^2\, e^{-2t}\} = -\frac{t^2}{s+2}\ e^{-t(s+2)} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{s+2}\ e^{-t(s+2)}(2t)\, dt$$

$$L\{t^2\, e^{-2t}\} = \frac{2}{s+2}\int_0^{+\infty} t\ e^{-t(s+2)}\, dt$$ integrando nuevamente por partes tenemos:

$$L\{t^2\, e^{-2t}\} = \frac{2}{s+2}\left[-\frac{t}{s+2}e^{-t(s+2)} \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{s+2}\ e^{-t(s+2)}\, dt\right]$$

$$L\{t^2\, e^{-2t}\} = \frac{2}{s+2}\left(\frac{1}{s+2}\right)\int_0^{+\infty} e^{-t(s+2)}\, dt = -\frac{2}{(s+2)^3}\ e^{-t(s+2)} \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$$

$$L\{t^2\, e^{-2t}\} = \frac{2}{(s+2)^3}$$ siendo s+2 > 0; s > -2

7.- Evalúe $L\{f(t)\}\ cuando\ f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3 \\ 2, & t \ge 3 \end{cases}$

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, f(t)dt = \int_0^{3} e^{-st}(0)dt + \int_3^{+\infty} e^{-st}(2)dt$$

$$L\{f(t)\} = 2\int_3^{+\infty} e^{-st}\, dt = -\frac{2}{s}e^{-st} \begin{cases} +\infty \\ 3 \end{cases} = \frac{2}{s}e^{-3s}$$ siempre que s > 0

PROPUESTO: $L\{t\ Cos(t)\}$ R: $\frac{s-1}{(s^2+1)^2}$ $siempre\ que\ s > 0$

TRANSFORMADAS DE ALGUNAS FUNCIONES BÁSICAS

$a)\ L\{1\} = \frac{1}{s}$ $b)\ L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$c)\ L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ $d)\ L\{Sen(kt)\} = \frac{k}{s^2+k^2}$

$e)\ L\{Cos(kt)\} = \frac{s}{s^2+k^2}$ $f)\ L\{Senh(kt)\} = \frac{k}{s^2-k^2}$

g) $L\{Cosh(kt)\} = \frac{s}{s^2-k^2}$

8.- Evalúe $L\{Sen^2(t)\}$

$$L\{Sen^2(t)\} = L\left\{\frac{1-Cos(2t)}{2}\right\} = L\left\{\frac{1}{2} - \frac{Cos(2t)}{2}\right\} = L\left\{\frac{1}{2}\right\} - L\left\{\frac{Cos(2t)}{2}\right\}$$

$$L\{Sen^2(t)\} = \frac{1}{2}L\{1\} - \frac{1}{2}L\{Cos(2t)\} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2s^2+8}$$

$$L\{Sen^2(t)\} = \frac{2s^2+8-2s^2}{2s(2s^2+8)} = \frac{8}{2s(2s^2+8)} = \frac{8}{4s(s^2+4)}$$

$$L\{Sen^2(t)\} = \frac{2}{s(s^2+4)} \quad donde \quad s > 0$$

IMPORTANTE: El factor común que vamos a usar en la potencia de las funciones exponenciales será el $-t$ para que $(s \pm a)$ sea mayor a cero y de esta manera la integral converja. Ejemplo:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, e^{2t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(s-2)}\, dt \qquad si \quad s-2>0 \quad la\ integral\ coverge$$

PARA VOLVER AL MENÚ ANTERIOR PRESIONE Laplace
EN EL MENU PRINCIPAL