TEOREMAS DE TRASLACIÓN

Teorema (i)

$Si\ F(s) = L\{f(t)\}\quad y\quad a\quad es\ cualquier\ número\ real,$
$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)\qquad L\{e^{at} f(t)\} = L\{f(t)\}_{s \to s-a}$

Ejercicios

1.- Evaluar $L\{e^{5t}\, t^3\}$

$$L\{e^{5t}\, t^3\} = L\{t^3\}_{s \to s-5} = \frac{3!}{s^4} \Big/_{s \to s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}$$

2.- Evaluar $L\{e^{-2t}\, Cos(4t)\}$

$$L\{e^{-2t}\, Cos(4t)\} = L\{Cos(4t)\}_{s \to s+2} = \frac{s}{s^2+4^2} \Big/_{s \to s+2}$$

$$L\{e^{-2t}\, Cos(4t)\} = \frac{s+2}{(s+2)^2+4^2}$$

3.- Evaluar $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+11}\right\}$

Si $s^2+6s+11$ tuviese raíces reales podríamos emplear fracciones parciales. Entonces, en este caso, completamos el cuadrado…

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+3-3}{(s+3)^2+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2} - \frac{3}{(s+3)^2+2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2+2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}_{s \to s+3} - \frac{3}{\sqrt{2}} L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\}_{s \to s+3} = e^{-3t} Cos(\sqrt{2}\, t) - \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-3t}\, Sen(\sqrt{2}\, t)$$

4.- Evaluar $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2+2s-8}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s-8}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2-9}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}_{s\to s-1} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-9}\right\}_{s\to s+1}$$

$$= \frac{1}{2}e^{t}\,t^2 + \frac{1}{3}\,e^{-t}\,Senh(3t)$$

Teorema (ii)

$$Si\ L\{f(t)\} = F(s) \quad y \quad a > 0, \quad entonces: \quad L\{f(t-a)\,U(t-a)\} = e^{-as}\,F(s)$$

Siendo $s > 0$

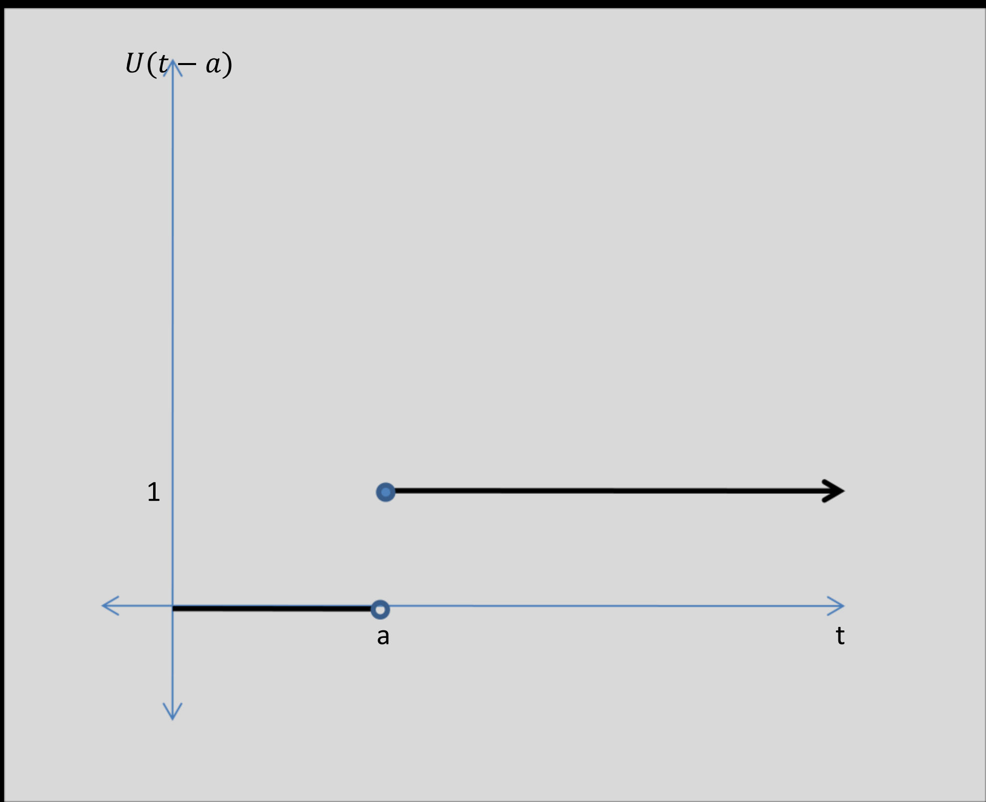
Forma alternativa:

$$L\{f(t)\,U(t-a)\} = e^{-as}\,L\{f(t+a)\}$$

Donde $U(t-a)$ es la función Escalón

<u>FUNCIÓN ESCALÓN</u>

$$U(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a \end{cases}$$



Ejercicios

1.- Evaluar $L\{(t-2)^3\, U(t-2)\}$

$$= e^{-2s}\; L\{t^3\} = e^{-2s}\left(\frac{3!}{s^4}\right) = \frac{6}{s^4}\, e^{-2s}$$

2.- Evaluar $L\{Sen(t)\, U(t-2\Pi)\}$

$$= e^{-2\Pi s}\; L\{Sen(t+2\Pi)\} = e^{-2\Pi s}\, L\{Sen(t)Cos(2\Pi) + Sen(2\Pi)Cos(t)\}$$

$$= e^{-2\Pi s}\, L\{Sen(t)\} = \frac{e^{-2\Pi s}}{s^2+1}$$

Forma inversa Teorema (ii):

Teorema (iii)

Si $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ *entonces la forma inversa cuando* $a > 0$ *es*:

$$L^{-1}\{e^{-as}\, F(s)\} = f(t-a)\, U(t-a)$$

Ejemplo: Evalúe $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\frac{\Pi s}{2}}}{s^2+9}\right\}$

$$= \frac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{3e^{-\frac{\Pi s}{2}}}{s^2+9}\right\} = \frac{1}{3} Sen\left[3\left(t-\frac{\Pi}{2}\right)\right]\, U\left(t-\frac{\Pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} Sen\left(3t - \frac{3\Pi}{2}\right)\; U\left(t-\frac{\Pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[Sen(3t)Cos\left(\frac{3\Pi}{2}\right) - Sen\left(\frac{3\Pi}{2}\right)Cos(3t)\right] U\left(t-\frac{\Pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} Cos(3t)\, U(t-\Pi/2)$$

PARA VOLVER AL MENÚ ANTERIOR PRESIONE Laplace
EN EL MENU PRINCIPAL