CONVOLUCIÓN

Definición. $Si\ \ f\ y\ g\ son\ continuas\ parte\ por\ parte\ en\ [0,+\infty),\ la$

$convolución\ de\ f\ y\ g\ se\ representa\ por\ f * g\ y\ se\ define\ con\ la$

$$integral:\ f * g = g * f = \int_0^t f(T).g(t-T)dT$$

Ejemplo: Determine la convolución de $f(t) = e^t \quad y \quad g(t) = Sen(t)$

$e^t * Sen(t) = \int_0^t e^T\ Sen(t-T)dT$ integrando por partes tenemos:

$$= e^T Sen(t-T)\Big\{_0^t - \int_0^t -e^T Cos(t-T)dT$$

$= -Sen(t) + \int_0^t e^T Cos(t-T)dT$ integrando por partes nuevamente tenemos:

$$= -Sen(t) + e^T Cos(t-T)\Big\{_0^t - \int_0^t e^T Sen(t-T)dT$$

$$= -Sen(t) + e^t - Cos(t) - \int_0^t e^T Sen(t-T)dT$$

$$e^t * Sen(t) = -Sen(t) + e^t - Cos(t) - \left(e^t * Sen(t)\right)$$

$$2\left(e^t * Sen(t)\right) = -Sen(t) + e^t - Cos(t)$$

$$e^t * Sen(t) = \frac{1}{2}[-Sen(t) + e^t - Cos(t)]$$

TRANSFORMADA DE LA CONVOLUCIÓN

Definición. $Si\ f(t) y\ g(t) son\ continuas\ por\ tramos\ en\ [0,+\infty) y\ de$

$orden\ esponencial,\qquad L\{f * g\} = L\{f(t)\}\,L\{g(t)\} = F(s).G(s)$

Ejemplo. $L\{e^t * Sen(t)\}$

$$L\{e^t * Sen(t)\} = L\{e^t\}\,L\{Sen(t)\} = \left(\frac{1}{s-1}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

TRANSFORMADA INVERSA DE LA CONVOLUCIÓN

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g$$

Ejercicios.

1.- Evalúe $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\right\}$

$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\right\}$ Luego: $F(s) = \frac{1}{s-1}$ $f(t) = e^t$ y

$G(s) = \frac{1}{s+4}$ $g(t) = e^{-4t}$ entonces aplicamos la convolución:

$$f * g = \int_0^t e^T e^{-4(t-T)} dT = \int_0^t e^T e^{-4t} e^{4T} dT = \int_0^t e^{-4t} e^{5T}\, dT$$

$$f * g = e^{-4t}\int_0^t e^{5T}\, dT = \frac{1}{5} e^{-4t} e^{5T} \begin{cases} t \\ 0 \end{cases} = \frac{1}{5} e^{-4t}[e^{5t} - 1]$$

$$= \frac{1}{5}[e^t - e^{-4t}]$$

2.- Evalúe $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\}$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + k^2} \qquad y \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + k^2}$$

Entonces: $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+k^2}\right\} = \frac{1}{k} Sen(kt)$ luego:

Como $f(t) = \frac{1}{k} Sen(kt)$ y $g(t) = \frac{1}{k} Sen(kt)$

$$f * g = \int_0^t \frac{1}{k} Sen(kT) \frac{1}{k}\, Sen(kt - kT) dT$$

$$= \frac{1}{k^2}\int_0^t Sen(kT)\, Sen(kt - kT) dT$$

$$= \frac{1}{k^2}\int_0^t Sen(kT)[Sen(kt)Cos(kT) - Sen(kT)Cos(kt)] dT$$

$$= \frac{1}{k^2}\left[Sen(kt)\int_0^t Sen(kT)Cos(kT) dT - Cos(kt)\int_0^t Sen^2(kT) dT\right]$$

$$= \frac{1}{k^2}\left[\frac{Sen(kt)}{k}\left(\frac{Sen^2(kT)}{2}\right)\Big\{\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} - \ Cos(kt)\int_0^t \frac{1-Cos(2kT)}{2}dT\right]$$

$$= \frac{1}{k^2}\left[\frac{Sen^3(kt)}{2k} - \frac{1}{2}t\ Cos(kt) + \frac{1}{4k}Cos(kt)Sen(2kt)\right]$$

$$= \frac{1}{2k^2}\left[\frac{Sen^3(kt)}{k} - tCos(kt) + \frac{1}{k}Cos(kt)Sen(kt)Cos(kt)\right]$$

$$= \frac{1}{2k^2}\left[\frac{Sen^3(kt)}{k} - tCos(kt) + \frac{1}{k}Sen(kt)Cos^2(kt)\right]$$

$$= \frac{1}{2k^2}\left[\frac{Sen^3(kt)}{k} - tCos(kt) + \frac{1}{k}Sen(kt)(1 - Sen^2(kt))\right]$$

$$= \frac{1}{2k^2}\left[\frac{Sen^3(kt)}{k} - tCos(kt) + \frac{1}{k}Sen(kt) - \frac{1}{k}Sen^3(kt)\right]$$

$$= \frac{1}{2k^2}\left[\frac{1}{k}Sen(kt) - tCos(kt)\right]$$

PARA VOLVER AL MENÚ ANTERIOR PRESIONE Laplace
EN EL MENU PRINCIPAL