TRANSFORMADA DE UNA INTEGRAL

Teorema. $Si\ \ f\ es\ continua\ parte\ por\ parte\ en\ [0,+\infty)\ y$

$$L\{f(t)\} = F(s)\quad entonces\quad \boxed{L\left\{\int_0^t f(T)dT\right\} = \frac{F(s)}{s}}$$

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(T)dT}$$

Ejercicios

1.- Desarrolle $\quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$

$$L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2+1}}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t SenT\ dT = -CosT\begin{cases} t \\ 0 \end{cases} = 1 - Cos(t)$$

2.- Evalúe $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}$

Siguiendo el teorema tenemos que:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s(s^2+1)}}{s}\right\}$$

Luego $F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$ entonces $f(t)$ será $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$

Aplicando fracciones parciales, tenemos:

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+1} \quad \rightarrow \quad 1 = \mathrm{a}(\mathrm{s}^2+1) + \mathrm{s}(\mathrm{bs}+\mathrm{c})$$

$1 = as^2 + a + bs^2 + sc$ de esta ecuación tenemos:

$$a = -b; \quad c = 0; \quad a = 1; \quad b = -1$$

Entonces: $\quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = 1 - Cos(t)$

De acuerdo al teorema, entonces:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t [1 - Cos(T)]\, dT = t - Sen(t)$$

3.- Evalúe $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$

Siguiendo el teorema tenemos que:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2(s^2+1)}}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}$$

Determinamos $f(t)$ haciendo $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$, luego:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = f(t)$$

Aplicamos fracciones parciales:

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{as+b}{s^2} + \frac{cs+e}{s^2+1} \quad \rightarrow \quad 1 = (s^2+1)(as+b) + s^2(cs+e)$$

$1 = as^3 + bs^2 + as + b + cs^3 + es^2$ de esta ecuación tenemos:

$$a = -c\,; \quad b = -e\,; \quad a = 0\,; \quad b = 1\,; \quad c = 0\,; \quad e = -1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = t - Sen(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2(s^2+1)}}{s}\right\} = \int_0^t [T - Sen(T)]\ dT = \left[\frac{T^2}{2} + Cos(T)\right] \begin{cases} t \\ 0 \end{cases}$$

$$= \frac{t^2}{2} + Cos(t) - 1$$

PARA VOLVER AL MENÚ ANTERIOR PRESIONE Laplace
EN EL MENU PRINCIPAL