APLICACIONES

DESARROLLO DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR MEDIO DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE.

Definición. *Se tiene* $a_n\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0\, y = g(t)$

la ecuación transformada es:

$$a_n L\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1} L\left\{\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\} + \cdots + a_1 L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + a_0 L\{y\} = L\{g(t)\}$$

De acuerdo al teorema de la transformada de una derivada se tiene:

$$a_n\left[S^n y(s) - S^{n-1}y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)\right] + a_{n-1}\left[S^{n-1}y(s) - S^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)\right] + \cdots + a_1 S y(s) + a_0 y(s) = G(s)$$

En donde: $y(s) = L\{y(t)\}$ y $G(s) = L\{g(t)\}$ siendo conocidas:

$$y^{(n-1)}(0),\ \ y^{(n-2)}(0), \ldots, y(0)$$

Ejercicios.

1.- Resuelva $y' - 3y = e^{2t}$, $y(0) = 1$

$L\{y'\} - 3L\{y\} = L\{e^{2t}\}$ Como;

$L\{y'\} = Sy(s) - y(0) = Sy(s) - 1$ y $L\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$ entonces:

$$Sy(s) - 1 - 3y(s) = \frac{1}{s-2} \quad \rightarrow \quad y(s)[s-3] - 1 = \frac{1}{s-2}$$

$$y(s) = \left(\frac{1}{s-2} + 1\right)\left(\frac{1}{s-3}\right) = \left(\frac{1+s-2}{s-2}\right)\left(\frac{1}{s-3}\right)$$

$$y(s) = \left(\frac{s-1}{s-2}\right)\left(\frac{1}{s-3}\right) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$$

Por fracciones parciales:

$$y(s) = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-3} \quad \rightarrow \quad y(t) = -L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}$$

2.-Resuelva $y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}$, $y(0) = 2,$ $y'(0) = 6$

$$L\{y''\} - 6L\{y'\} + 9L\{y\} = L\{t^2\, e^{3t}\}$$

$$S^2y(s) - Sy(0) - y'(0) - 6[Sy(s) - y(0)] + 9y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$S^2y(s) - 2s - 6 - 6(Sy(s) - 2) + 9y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$S^2y(s) - 6Sy(s) + 9y(s) - 2s + 6 = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$y(s)[s^2 - 6s + 9] = 2s - 6 + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$y(s)[(s-3)^2] = 2(s-3) + \frac{2}{(s-3)^2}$$

$$y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5} \quad \rightarrow \quad y(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-3}\right\} + \frac{1}{4!}L^{-1}\left\{\frac{2(4!)}{(s-3)^5}\right\}$$

$$y(t) = 2e^{3t} + \frac{1}{12}\, t^4e^{3t}$$

3.- Resuelva $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}$, $y(0) = 0,$ $y'(0) = 0$

$$L\{y''\} + 4L\{y'\} + 6L\{y\} = L\{1 + e^{-t}\}$$

$$S^2y(s) - Sy(0) - y'(0) + 4[Sy(s) - y(0)] + 6y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$S^2y(s) + 4Sy(s) + 6y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$(s^2 + 4s + 6)y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \quad \rightarrow \quad y(s)[s^2 + 4s + 6] = \frac{2s+1}{s(s+1)}$$

$y(s) = \frac{2s+1}{(s^2+4s+6)s(s+1)}$ Por fracciones parciales tenemos:

$$y(s)=\frac{\frac{1}{6}}{s}+\frac{\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{-\frac{s}{2}-\frac{5}{3}}{s^2+4s+6}=\frac{\frac{1}{6}}{s}+\frac{\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}(s+2)-\frac{2}{3}}{(s+2)^2+2}$$

$$y(s)=\frac{\frac{1}{6}}{s}+\frac{\frac{1}{3}}{s+1}-\frac{1}{2}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right]-\frac{2}{3}\left[\frac{1}{(s+2)^2+2}\right]$$

$$y(t)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\,Cos\left(\sqrt{2}\,t\right)-\frac{2}{3\sqrt{2}}e^{-2t}Sen\left(\sqrt{2}\,t\right)$$

4.- Resuelva $\quad y'' + 16y = Cos(4t)\,, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=1$

$$L\{y''\}+16L\{y\}=L\{Cos(4t)\}$$

$$S^2y(s)-Sy(0)-y'(0)+16y(s)=\frac{s}{s^2+16}$$

$$S^2y(s)+16y(s)=\frac{s}{s^2+16}+1$$

$$y(s)=\frac{s}{(s^2+16)^2}+\frac{1}{s^2+16}$$

Usando la tabla tenemos que:

$$y(t)=\frac{1}{8}\,t\,Sen(4t)+\frac{1}{4}\,Sen(4t)$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Debemos resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales. Cada una de estas ecuaciones incorporan las expresiones diferenciales de “x” de “y” y expresiones en función de t.

Ejemplo.

Resuelva $\begin{array}{l} 2x' + y' - y = t \quad sujetas \;\; a \quad x(0) = 1, \; y(0) = 0 \\ x' + y' = t^2 \end{array}$

Transformamos las dos ecuaciones:

$$2[Sx(s) - x(0)] + Sy(s) - y(0) - y(s) = \tfrac{1}{s^2} \qquad \text{(I)}$$
$$Sx(s) - x(0) + Sy(s) - y(0) = \tfrac{2}{s^3} \qquad \text{(II)}$$

Sustituimos los valores iniciales:

$$2[Sx(s) - 1] + Sy(s) - y(s) = \tfrac{1}{s^2} \qquad \text{(I)}$$
$$Sx(s) + Sy(s) = \tfrac{2}{s^3} + 1 \qquad \text{(II)}$$

Multiplicamos a (II) por -2 para así, por reducción, eliminar $x(s)$:

$$2Sx(s) + y(s)[s-1] = \tfrac{1}{s^2} + 2 \qquad \text{(I)}$$
$$-2Sx(s) - 2Sy(s) = -\tfrac{4}{s^3} - 2 \qquad \text{(II)}$$

Sumamos las dos ecuaciones, quedando:

$$y(s)[s-1] - 2sy(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3}$$
$$y(s)[-s-1] = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3} \qquad \rightarrow \qquad y(s) = \frac{4-s}{s^3(s+1)}$$

Por fracciones parciales:

$$y(s) = \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{5}{s+1}$$

$$y(t) = 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t}$$

Para determinar $x(t)$ debemos hallar $x(s)$. Podemos utilizar cualquiera de las dos ecuaciones, sustituyendo el valor de $y(t)$. En este caso usaremos la ecuación (II), teniendo:

$$x(s) = -y(s) + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^4}$$

$$x(t) = -L^{-1}\{y(s)\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{s^4}\right\}$$

$$x(t) = -5 + 5t - 2t^2 + 5e^{-t} + 1 + \frac{1}{3}t^3$$

$$x(t) = -4 + 5t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 5e^{-t}$$

PARA VOLVER AL MENÚ ANTERIOR PRESIONE Laplace
EN EL MENU PRINCIPAL