UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE BOLÍVAR
UNIDAD DE ESTUDIOS BÁSICOS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS IV
Prof. José Gregorio Páez Veracierta
Última actualización: 30-09-2007

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES

PROBLEMAS RESUELTOS

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR.

1.- La ecuación del movimiento de vibración de un cuerpo unido a un resorte siendo la elongación del muelle en el instante t. Si para t=0, s=2 y $\frac{ds}{dt}=1$, hallar s en función de t.

Tenemos y $m^2+16=0, m=\pm 4i$ *la solución general es* $s=A\cos 4t+Bsen\,4t$

Para $t=0,\ s=2=A$ *por lo tanto* $s=2\cos 4t+Bsen\,4t$

Para $t=0, \frac{ds}{dt}=1=-8sen4t+4B\cos 4t=4B\ y\ B=\frac{1}{4}$

Luego la ecuación es $s=2\cos 4t+\frac{1}{4}sen 4t$

2.- La intensidad de corriente en cierto circuito eléctrico viene dada por $\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{dI}{dt}=110$. *Si para* $t=0$, *es* $I=0\ y\ \frac{dI}{dt}=0$ *para hallar I en función de t*

$$m^2+4m+2504=0;\ m=-2\pm 50\,i,\ Yc=\ e^{-2x}(A\cos\ 50\ x+Bsen\ 50\ x)$$

la integral particular es igual $I=\frac{110}{2504}=0.044$

por lo tanto , la solución general es $I=e^{-2x}(A\cos\ 50\ x+Bsen\ 50\ x)+0.044$

para t=0, I=0= A+0.044; luego A=-0.044

para t=0, $\frac{dl}{dt}=0=$ $e^{-2x}(-2A+50B)\cos 50t-(2B+50A)sen50t=-2A+50B$

de donde B=-0.0018 y la relación pedida es $I=-e^{-2x}(0.044\ \cos\ 50\ t+0.0018\ sen\ 50\ t)+0.044$

3.- Una cadena de 4 metros de longitud comienza a deslizar por una superficie, sin rozamiento, en el momento en que pende verticalmente un tramo de un metro de longitud. Hallar su velocidad cuando abandona la superficie el último trozo de cadena

Sea s la longitud de cadena que cuelga en el instante t.

La fuerza F que obliga a deslizara la cadena es el peso de la parte que cuelga.

Fuerza= masa x aceleración = ms”=1/4mgs o s”=1/4gs.

$$2s's'' = \frac{1}{2} gss' \;\; y \;\; (s')^2 = \frac{1}{4} g s^2 + c_1$$

$$para \;\; t = 0, \; s = 1 \; y \; s'. luego \; c_1 = \frac{-1}{4} g \; y \; s' = \frac{1}{2}\sqrt{g}.\sqrt{s^2 - 1}$$

$$para \; s = 4, \; s' = \frac{1}{2}\sqrt{15g} \; m/s$$

4.- Resolver e interpretar el problema de valor inicial:

$$d^2x/dt^2 + 16x = 0$$

$$x\,(0) = 10, \;\; dx/dt\,\big|_{t=0} = 0$$

Una formulación equivalente del problema es: se tira hacia abajo de un cuerpo que depende de un resorte hasta que este 10 unidades bajo la posición de equilibrio y luego se le retiene hasta t = 0; se le suelta a continuación de manera que parta de un estado de reposo Aplicando las condiciones iniciales a la solución.

$$X\,(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \operatorname{sen} 4t$$

$$X\,(0) = 10 = C_1 .\,1 + C_2 .\,0$$

$$C_1 = 10 \qquad x\,(t) = 10 \cos 4t + C_2 \operatorname{sen} 4t$$

$$dx/dt = -\,40 \operatorname{sen} 4t + 4\,C_2 \cos 4t$$

$$dx/dt\,\big|_{t=0} = 0 = 4\,C_2 .\,1$$

$C_2 = 0 \rightarrow$ la ecuación de movimiento es:

$$X\,(t) = 10 \cos 4t$$

La solución muestra claramente que una vez que el sistema se pone en movimiento permanece en tal estado, con la masa desplazándose 10 unidades hacia cada lado de la posición de equilibrio x = 0.

5.- Un cuerpo que pesa 2 lb. Estira un resorte 6 pulgadas. Dicho cuerpo se suelta en t = 0 desde un punto que esta 8 pulgadas bajo la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia arriba de 4/3 pie/ seg. Determine la función x (t) que describe el movimiento libre resultante.

Puesto que estamos usando el sistema de unidades inglesas gravitacionales, las magnitudes dadas en pulgadas deben expresarse en pies; esto es: 6 plg = 1/2 pie ; 8 plg = 2/3 pies.

Además, debemos convertir las unidades de peso a unidades de masas

$$m = 2/32 = 1/16 \text{ slug}$$

Por ley de Hooke obtenemos:

$$2 = k\,(1/2); \rightarrow k = 4 \text{ lb/ pie}$$

Luego:

$$1/16\ d^2x/dt^2 = -4x \quad \text{y} \quad d^2x/dt^2 + 64x = 0$$

El desplazamiento y la velocidad inicial están dados por:

$$X(0) = 2/3, \quad dx/dt\,\big|_{t=0} = -4/3$$

Luego:

$W^2 = 64$; es decir $W = 8$; de modo que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$X(t) = C_1 \cos 8t + C_2 \text{ sen } 8t$$

Aplicando las condiciones iniciales obtenemos:

$$X(0) = 2/3 = C_1.1 + C_2.\ 0;\ (C_1 = 2/3)$$

$$X(t) = 2/3 \cos 8t + C_2 \text{ sen } 8t$$

$$X'(t) = -16/3 \text{ sen } 8t + 8\ C_2 \cos 8t$$

$$X'(0) = -4/3 = -16/3.\ 0 + 8\ C_2.\ 1;\ (C2 = -1/6)$$

Por lo tanto la ecuación de movimiento es:

$$X(t) = 2/3 \cos 8t - 1/6 \text{ sen } 8t$$

6.- Un cuerpo que pesa 8lb estira un resorte 2 pie. Suponiendo que una fuerza de amortiguación numéricamente igual a 2 veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema y que el peso se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 3 pie/seg, determinar la ecuación de movimiento.

Por la ley de Hooke tenemos:

$$8 = k\,(2),\ k = 4\text{lb/pie}$$

Y por $m = w/g$

$$m = 8/32 = ¼ \text{ slug}$$

En consecuencia, la ecuación diferencial del movimiento es:

$$¼\ d^2x/dt^2 = -4x - 2\ dx/dt \text{ o bien } d^2x/dt^2 + 8\ dx/dt + 16x = 0$$

Las condiciones iniciales son:

$$X(0) = 0,\ dx/dt\,\big|_{t=0} = -3$$

Ahora bien la ecuación auxiliar es:

$$M^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0$$

De modo que $m_1 = m_2 = -4$ es decir el sistema esta críticamente amortiguado y: $x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 te^{-4t}$
La condición inicial $x(0) = 0$ exige de inmediato que $C_1 = 0$, por el contrario usando $x'(0) = -3$; resulta $C_2 = -3$
Así la ecuación de movimiento es:
$X(t) = -3te^{-4t}$.

7.- Un cuerpo de 8lb estira 2pies un resorte. Si una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 2 veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, deduzca la ecuación del movimiento si el cuerpo se suelta de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 3pies/seg.

De acuerdo con La Ley de Hooke, $8= k(2)$ $k= 4$lb/pie.
Entonces $w= m*g$, $m= 8/32= ¼$ slug.

Entonces la ecuación diferencial del movimiento es:
$¼ \, d^2x/dt^2= -4x-2dx/dt$ o sea $d^2x/dt^2 + 8dx/dt + 16x=0$

La ecuación auxiliar es $m^2+8m+16= (m+4)^2$, de forma que $m_1=m_2= -4$.
Luego el sistema es críticamente amortiguado y :
$X(t)= C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}$

Al aplicar las condiciones iniciales $x(0)= 0$ y $x'(0)= -3$ vemos, a su vez, que $C_1=0$ y $C_2= -3$. Así, la ecuación del movimiento es:
$X(t)= -3te^{-4t}$

8.- Determine la carga q(t) en el capacitor de un circuito en serie LRC, cuando L= 0,25 Henry (h), R= 10 Ohm(Ω), C= 0,001 Faradios (f), E(t)= 0, q(0)= q_0 Coulombs (C) e i(0)= 0 Amperes (A).

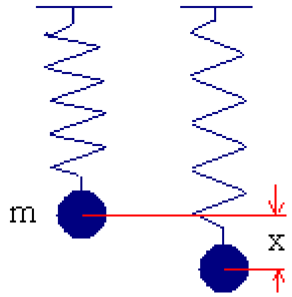
Como $1/C= 1000$, esto se transforma en:
$1/4q'' + 10q' + 1000q= 0$ o sea $q''+ 40q' + 4000q= 0$

Al resolver esta ecuación homogénea con métodos normales, tenemos que el circuito es subamortiguado y que $q/t)= e^{-20t} (C_{1.} \cos60t + C_{2.} \operatorname{sen}60t)$ aplicamos las condiciones iniciales y obtenemos que $C_1= q_0$ y $C_2= 1/3q_{0.}$

Entonces: $q(t)= q_0e^{-20t} (\cos60t + 1/3 \operatorname{sen}60t)$

Ahora podemos escribir la solución anterior de la forma:
$q(t)= q_0.\sqrt{10}/3 \, e^{-20t} \operatorname{sen} (60t + 124q)$.

9.- Oscilador Armónico simple



Imagínese una masa "m" en una superficie sin fricción colgando de un resorte la observación del movimiento nos da la suposición que al aumenta la fuerza "F" de igual manera aumentara la longitud del resorte "X" lo anterior puede representarse como:

$$F \alpha X$$

La fuerza es directamente proporcional a la longitud , para crear un igualdad podemos calcular la razón de cambio

$$\frac{\Delta F}{\Delta X} = k$$

Sustituyendo en la ecuación inicial obtenemos que

$$F = kx$$

Lo anterior de define como la ley de hooke aplicada a un resorte, es pertinente notar que la ley de hooke solo es valida cuando el objeto puede recuperar su forma original . la razón de cambio nos indica que la función de fuerza en razón de la distancia F(x) tiene la forma y=mx+b una línea recta.

De lo anterior podemos definir una ecuación diferencial que resuelva la oscilación de un resorte

$$\sum F_y = ma$$

La segunda ley de newton, la sumatoria de las fuerzas es igual a la masa por aceleración por lo tanto

$$-kx = ma$$
$$ma + kx = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Aplicando la solución de las ecuaciones de segundo orden con coeficiente constantes encontramos:

$$\frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r^2 + \frac{k}{m}r = 0 \quad \frac{-k/m \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2}}{2}$$

$$X(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \frac{-k/m \pm \left(\frac{k}{m}\right)}{2}$$

Cuando las condiciones de la formula anterior es t=0 , v=0 y x= Amplitud del resorte "Y"

$$Y = A\cos(0) + B\sin(0) = A$$

$$0 = A\sin(0) + B\cos(0) = B$$

Siendo A = amplitud del resorte posición alargamiento después de equilibrio y B=0

$$X(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Es posible también escribir la solución de un problema de la forma anterior sin tener las condiciones t=0 v=0 usando un Angulo de fase

$$X(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}} = X(t) = X\sin\left(\frac{k}{m} + \sigma\right)$$

La amplitud "X" puede definirse como

$$X = \sqrt{A^2 + B^2}$$

El Ángulo de fase debe ser en radianes

$$\sigma = \tan\frac{A}{B}$$

10.- Un cuerpo de 16lb se une a un resorte de 5pie de longitud. En la posición de equilibrio, el resorte mide 8,2 pies. Si el cuerpo se eleva y se suelta del reposo en un punto a 2 pies arriba de la posición de equilibrio, determine los desplazamientos X(t). Considere que el medio que rodea al sistema ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a la velocidad instantánea.

El alargamiento del resorte después de unir el cuerpo es 8,2-5= 3,2pies. De modo que según La Ley de Hooke 16= k(32), o sea, k= 5lb/pies. Además m= 16/32= ½ slug y la ecuación diferencial es:
½ d^2x/dt^2= -5x-dx/dt ò d^2x/dt^2 + 2dx/dt + 10x= 0.

Las raíces de $m^2 + 2m + 10= 0$ son $m_1= -1 + 3i$ y $m_2= -1-3i$, lo cual implica que el sistema es sub-amortiguado y que:

$$X(t)= e^{-t} (C_1 \cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t)$$

Por ultimo, las condiciones iniciales $x(0)= -2$ y $x'(0)= 0$, determinar las constantes $C_1= -2$ y b $C_2= -2/3$, así que la ecuación de movimiento es:

$$X(t)= e^{-t} (-2 \cos 3t - 2/3 \operatorname{sen} 3t)$$

11.- Determine la solución q_p (*t*) de estado estable y la corriente de estado estable en un circuito en serie *LRC* cuando el voltaje aplicado es *E*(*t*) = E_0 sen *γt*.

$$L \frac{d^2q}{dt2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E_0 \operatorname{sen} \gamma t$$

Al aplicar el método de los coeficientes indeterminados, suponemos una solución particular de la forma $q_p(t) = A \operatorname{sen} \gamma t + B \cos \gamma t$. Sustituimos esta expresión en la ecuación diferencial, simplificamos e igualamos coeficientes y los resultados son

$$A= \frac{E_0\left(L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}\right)}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)}, \qquad B = \frac{E0R}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)}$$

Conviene expresar a A y B en función de nuevos símbolos:

Si $X= L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}$, entonces $X^2 = L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2}$.

Si $Z= \sqrt{X^2 + R^2}$, entonces $Z^2 = L^2\gamma^2 - \dfrac{2L}{C} + \dfrac{1}{C^2\gamma^2} + R^2$

Por consiguiente, $A = E_0X/ (-\gamma Z^2)$ y $B= E_0R/ (-\gamma Z^2)$, de suerte que la carga de estado estable es

$$q_p(t) = - \frac{E_0X}{\gamma Z^2} \operatorname{sen} \gamma t - \frac{E_0R}{\gamma Z^2} \cos \gamma t$$

Entonces la corriente de estado estable esta definida por $i_p(t) = q'_p(t)$:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z} \operatorname{sen} \gamma t - \frac{X}{Z} \cos \gamma t\right)$$

Las cantidades $X = L\gamma - 1/C\gamma$ y $Z = \sqrt{X^2 + R^2}$

12.- Una viga de longitud L esta empotrada en ambos extremos. Determine la flexión de esa viga si sostiene una carga constante, w_0, uniformemente distribuida en su longitud; esto es, $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = w_0.$$

Ya que la viga se encuentra empotrada en su extremo izquierdo (x = 0) y en su extremo derecho (x = L), no hay flexión vertical y la curva es horizontal en esos puntos. Así, las condiciones en la frontera son

$y(0) = 0, y'(0) = 0$ Y $y(L) = 0, y'(L) = 0.$

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \frac{w_0}{24EI} x^4$$

$$c_3L^2 + c_4L^3 + \frac{w_0}{24EI} L^4 = 0$$

$$2c_3L + 3c_4L^2 + \frac{w_0}{6EI} L^3 = 0$$

Al resolver este sistema se obtiene C3 = w0L2/24EI y c4 = -w0L/12EI. Entonces, la flexión es

$$y(x) = \frac{w_0L^2}{24EI} x^2 - \frac{w_0L}{12EI} x^3 + \frac{w_0}{24EI} x^4 = \frac{w_0}{24EI} x^2 (x - L)^2$$

13.- Un contrapeso de 8 lb. estira 2 pies un resorte. Si una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 2 veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, deduzca la ecuación del movimiento si el contrapeso se suelta de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 3 pies/s.

De acuerdo con la ley de Hooke, $8 = k(2)$ da $k = 4$ lb/ pie. Entonces W = mg da m = 8/32 = ¼ slug. Entonces la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 2\frac{dx}{dt} \quad \text{o sea} \quad \frac{d2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

La ecuación auxiliar es $m2 + 8m + 16 = (m+4)^2 = 0$, de forma que m1=m2= -4

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t}$$

Al aplicar las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = -3$ vemos, a su vez, que c1 = 0 y c2 = -3. Así la ecuación del movimiento es

$$x(t) = -3te^{-4t}$$

14.- Una masa que pesa *2 lb* hace que un resorte se estire *6pulg*. Cuando *t* =0, la masa se suelta desde un punto a *8 pulg* debajo de la posición de equilibrio con una velocidad inicial, hacia arriba, de *4/3 pie/s.* deduzca la ecuación del movimiento libre.

Como empleamos el sistema técnico de unidades inglesas, las medidas expresadas en pulgadas se deben pasar a *pie: 6 pulg = ½ pie; 8 pulg = 2/3 pie.* Además, debemos convertir las unidades de peso, que están en libras, en unidades de masa partimos de *m= w/g* y, en este caso, *m =2/32 =1/16 slug.* También según la ley de Hooke*, 2=k(1/2)* implican que la constante del resorte es *k=4lb/pie*; por tanto, la ecuación (1) se transforma en:

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x \quad o \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$$

El desplazamiento y las velocidades iniciales son $x\,(0)=\frac{2}{3}$, $x'(0)=-\frac{4}{3}$, donde el signo negativo en la ultima condición es consecuencia de que la masa recibe una velocidad inicial en dirección negativa o hacia arriba.

Entonces $W^2=64$, o sea, $w=8$, de modo que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$X\,(t) = c1\cos(8t) + c2\,\mathrm{sen}\,(8t).$$

Al aplicar las condiciones iniciales a *x(t)* y *x'(t) se obtienen* $c1=\frac{2}{3}$ *y* $c2=-\frac{1}{16}$. Así, la ecuación del movimiento es:

$$X\,(t) = \frac{2}{3}\cos(8t) - \frac{1}{16}\,\mathrm{sen}\,(8t).$$

Forma alternativa *X(t)* : cuando $c1 \neq 0$ y $c2 \neq 0$, la **amplitud** A de las vibraciones libres no se puede conocer de inmediato examinando la ecuación (3). Esto es, aunque la masa del ejemplo 1 tiene un desplazamiento inicial de $\frac{2}{3}$ de pie respecto a la posición de equilibrio, la amplitud de las vibraciones es mayor de la forma (3) a la forma más simple:

$$X\,(t) = A\,\mathrm{sen}\,(wt + \phi),$$

Donde $\mathbf{A}=\sqrt{c1^2+c2^2}$ y ϕ es un **ángulo de fase** definido por:

$$\mathrm{Sen}\,\phi = \frac{c1}{A}\ \{$$

$$\tan\phi\ \frac{c1}{c2}$$

$$\cos\phi = \frac{c2}{A}\ \{$$

Para comprobarlo, desarrollamos la ecuación (6) aplicando la formula del seno de la suma:

$$A\,\mathrm{sen}(Wt)\cos(\phi) + A\cos(wt)\,\mathrm{sen}(\phi) = (A\,\mathrm{sen}(\phi)) = \cos(wt) + (A\cos(\phi))\,\mathrm{sen}(Wt).$$

Por medio de Pitágoras podemos definirlo así:

$$Sen(\phi)= \frac{c1}{\sqrt{c1^2+c2^2}} = \frac{c1}{A},\ \cos\phi = \frac{c2}{\sqrt{c1^2+c2^2}} = \frac{c2}{A},$$

La ecuación (8) se transforma en:

$$A\frac{c1}{A}\cos(wt) + A\frac{c2}{A}\,sen\,(Wt) = c1\cos(wt) + c2\,sen\,(Wt) = X(t).$$

15.- Un contrapeso de *8lb* estira *2 pies* un soporte. Si una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual 2 veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, deduzca la ecuación del movimiento si el contrapeso se suelta de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de *3 pies /s*

De acuerdo con la ley de Hooke *,8=k (2)da k=4lb/pie* entonces *w =mg da m = 8/2 =1/*4 slug . Entonces la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} = \_4x\_2\frac{dx}{dt} \quad o\ sea \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

La ecuación auxiliar de (17) *es* $m^2 + 8m + 16 = (m+4)^2 = 0$, de formar que $m_1 = m_2 = \_4$. Luego el sistema es críticamente amortiguado y:

$$X(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}$$

Al aplicar las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = -3$ vemos, a su vez que $c_1 = 0$ y $c_2 = \_3$, así, la ecuación del movimiento es:

$$X(t) = -3te^{-4t}.$$

16.- Interprete y resuelva el problema del valor inicial

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + 1.2\frac{dx}{dt} + 2x = 5\cos(4t),\ x(0) = \frac{1}{2},\ x'(0) = 0$$

Podemos interpretar el problema como la representación de un sistema vibratorio formado por una masa (*m =1/5 slug o kg*) unidad a un resorte (*k=2 lb /pie o N/m)*. La masa parte del reposo a ½ unidad *(pie o m)* debajo de su posición de equilibrio. El movimiento es amortiguado *(B =1.2)* y esta dirigido por una fuerza externa periódica *(T=π/2 s)* que se inicia cuando *t=0* . cabria esperar ,intuitivamente , que aun con amortiguamiento el sistema permanece en movimiento hasta el momento en que la función de fuerza se "desconectara " y en adelante las amplitudes disminuirán ; sin embargo , tal como esta enunciado el problema *, f(t) =5 cos 4t* permanecerá "conectada por siempre .

Primero multiplicamos por 5 la ecuación diferencial (26) y resolvemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10\,x=0$$

Con los métodos acostumbrados. Dado que $m_1 = \_\ 3\ \_i$, entonces $x_0(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$. Aplicamos el método de coeficientes indeterminados, suponiendo que una solución particular tiene la forma $x_p(t) = A \cos 4t + B \operatorname{sen} 4t$. Derivando $xp\ (t)$ y sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene

$$x''_p + 6x'_p + 10x_p = (-6A+24B)COS\ 4t + (-24A - 6B)\operatorname{sen} 4T = 25\cos 4\ t.$$

El sistema resultante de ecuaciones

$$-6A + 24B = 25\ ,\quad -24A - 6B = 0$$

Tiene las soluciones $A = -\frac{25}{102}$ y $B = \frac{50}{51}$ en consecuencia $X(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t$.

Cuando hacemos ***t= 0*** en la ecuación anterior obtenemos ***c1*** $= \frac{38}{51}$. Si derivamos la ecuación y hacemos ***t= 0*** , obtenemos ***c2*** $= -\frac{86}{51}$; por consiguiente la ecuación de movimiento es :

$$\boldsymbol{x\ (t) = e^{-3t}}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}sent\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}sen4t\,\boldsymbol{\cdot}$$

17.- Una masa m, libre para desplazarse a lo largo del eje x, es atraída hacia el origen con una fuerza proporcional a su distancia al origen. Hallar el movimiento:

a) si se pone en marcha en $X = X_0$ partiendo del reposo.
b) Si se pone en marcha en $X = X_0$ con una velocidad inicial V_0, alejándose del origen.

Sea X la distancia del origen a la masa en el instante T.

Entonces, $m\ d^2X/dT^2 = -KX$ o sea $d^2X/dT^2 + K^2X = 0$, donde $K = mK^2$.

Integrando 1) $X = C_1 \operatorname{sen}(KT) + C_2\cos(KT)$, y derivando una vez respecto de T,

2) $V = -KC_2 \operatorname{sen}(KT) + KC_1 \cos(KT)$.

a) Para $T = 0$, $X = X_0$ y $V = 0$. Entonces, $C_1 = 0$ de 2), $C_2 = X_0$ de 1).
b) Para $T = 0$, $X = X_0$ y $V = V_0$. Entonces , $C_2 = X_0$, $C_1 = V_0/K$, y

$$X = (V_0/K)\operatorname{sen}(KT) + X_0\cos(KT).$$

En a) el movimiento es movimiento armónico simple de amplitud X_0 y periodo $2\pi/K$.

En b) el movimiento es movimiento armónico simple de amplitud $(\sqrt{V_0^2 + K^2X_0^2})/K$.

Para $T = 0$, $X = 0$. Luego $C_2 = -\sqrt{10/g}\ \ln 3/2$ y $T = \sqrt{10/g}\ \ln 2/3[x + 3/2 + (\sqrt{X^2+3X})]$.

Para $x = 8$, $T = \sqrt{10/g}\ \ln [(19+4\sqrt{22})/3 seg]$

18.- Un resorte para el que k = 48kg/dm, cuelga verticalmente teniendo fijo su extremo superior. Al extremo inferior se sujeta una masa que pesa 16kg. Una vez en equilibrio el sistema se tira de la masa hacia abajo haciéndola desplazar 1/6dm y se suelta. Discutir el movimiento resultante de la masa despreciando la resistencia del aire.

Tómese el origen en el centro de gravedad de la masa una vez conseguido el equilibrio del sistema, y sea x, positivo si se mide hacia abajo, el desplazamiento de la masa en el tiempo t. Cuando la masa esta en equilibrio la fuerza del resorte es igual en magnitud a la fuerza de gravedad, pero de sentido opuesto. La fuerza neta en el instante t es la fuerza del resorte $-kx$ correspondiente al desplazamiento x de la masa. Se tiene pues:

$(16/g)(d^2t/dt^2) = -48x$ de donde $d^2x/dt^2 + 96x = 0$, tomando el valor hipotético $g = 32dm/seg^2$

Integrando $x = c_1 \text{ sen } (\sqrt{96}t) + c_2 \cos (\sqrt{96}t)$

Derivando una vez mas respecto de t, $v = \sqrt{96}\ [c_1\cos (\sqrt{96}t) - c_2\text{sen } (\sqrt{96}t)]$

Cuando $t = 0$, $x = (1/6)$ y $v = 0$. Entonces, $c_2 = 1/6$, $c_1 = 0$. $x = (1/6) \cos (\sqrt{96}t)$.

Esto representa un movimiento armónico simple. El periodo es $(2\pi/\sqrt{96})$ seg, la Frecuencia es $(\sqrt{96}) / (2\pi)$ ciclos/seg. y al amplitud es 1/6dm.

19.- Un abalorio se desliza sin rozamiento a lo largo de una varilla recta de masa despreciable cuando la varilla gira con velocidad angular constante ω alrededor de su punto medio 0. Determine el movimiento en

a) si el abalorio esta inicialmente en reposo en 0.

b) Si el abalorio esta inicialmente en 0 moviéndose con velocidad g/2 ω.

El abalorio esta a x unidades de 0 en el instante t. Sobre él actúan dos fuerzas

I) Gravedad

II) La fuerza centrífuga $m\omega^2x$ que actúa a lo largo de la varilla dirigiéndose hacia fuera de 0.

Cuando la varilla haya girado un ángulo ωt. La componente de la fuerza de gravedad a lo largo de la varilla tendrá una magnitud $mg \text{ sen } (\omega t)$, estando dirigida hacia 0. Luego

$(md^2x/dt^2) = m\omega^2x - mg\text{sen } (\omega t)$ de donde $(d^2x/dt^2) - \omega^2x = - g \text{ sen } (\omega t)$, Integrando 1) $x = C_1e^{\omega t} + C_2\, e^{-\,\omega t} + (g/2\, \omega^2)$ sen (ωt). Derivando una vez respecto de t,

2) $v = \omega\, C_1e^{\omega t} - \omega C_2\, e^{-\,\omega t} + C_1+C_2 \cos(\omega t)$.

a) para $t = 0$, $x = 0$ y $v = 0$.

Entonces $C_1+C_2 = 0$ de 1).

$C_1-C_2 + (g/2\, \omega^2) = 0$ de 2),

$C_1 = - C_2 = -(g/4\, \omega^2)$ y

$x = (g/4\, \omega^2)\, (e^{-\,\omega t} - e^{\,\omega t}\,) + (g/2\, \omega^2)$ sen (ωt)

$x = - (g/2\, \omega^2)$ sh $(\omega t) + (g/2\, \omega^2)$ sen (ωt).

c) para $t = 0$, $x = 0$ y $v = (g/2\, \omega)$.

Entonces, $C_1+C_2 = 0$, $C_1-C_2 = 0$, $C_1 = C_2 = 0$ y

$x = (g/2\, \omega^2)$ sen (ωt).