UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE BOLÍVAR
UNIDAD DE ESTUDIOS BÁSICOS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS IV
Prof. José Gregorio Páez Veracierta
Última actualización: 30-09-2007

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES

PROBLEMAS RESUELTOS

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.

1.- Un resorte de peso despreciable está suspendido verticalmente. En su extremo libre se ha sujetado una masa de m kilogramos. Si la masa se mueve con velocidad v inicial m/seg cuando el resorte esta sin alargar, hallar la velocidad v como una función de alargamiento x metros.

Según la ley Hooke, la fuerza del resorte (fuerza opuesta al alargamiento).

Fuerza neta sobre el cuerpo = peso del cuerpo – fuerza del resorte.

Luego $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kx$

De donde $m\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = mg - kx$

Ya que $\dfrac{dx}{dt} = v$

Integrando $mv^2 = 2mgx - kx^2 + C$

Para $x = 0 \quad v = v_0$

Luego $C = mv_0^2$ y $mv^2 = 2mg - kx^2 + mv_0^2$

2.- Un paracaídas esta cayendo con una velocidad de 176 pies/seg = 53,65 m/seg cuando se abre su paracaídas. Si la resistencia del aire es Wv/256lb, donde W es el peso total del hombre y del paracaídas, hallar su velocidad como una función del tiempo t después de abierto el paracaídas.

Fuerza neta sobre el sistema = peso del sistema – resistencia del aire.

Luego $\dfrac{W}{g}\dfrac{dv}{dt} = W - \dfrac{Wv^2}{256}$

De donde $\frac{dv}{v^2 - 256}$ = - $\frac{dt}{8}$

Integrando entre los limites *t = 0 v = 176   y   t = t   v = v*

$$\int_{176}^{v} \frac{dv}{v^2 - 256} = -\frac{1}{8}\int_{0}^{t} dt$$

$$\frac{1}{32}\ln\frac{v-16}{v+16}\Bigg|_{176}^{v} = -\frac{t}{8}\Bigg|_{0}^{t}$$

$$\ln\frac{v-16}{v+16} - \ln\frac{5}{6} = -4t \qquad \frac{v-16}{v+16} = \frac{5}{6}e^{-4t} \qquad v = 16\frac{6+5e^{-4t}}{6-5e^{-4t}}$$

Obsérvese que el paracaidista alcanza rápidamente una velocidad aproximadamente constante, esto es, la velocidad Terminal de 16 pie/ seg. = 4,88 m/seg.

3.- Un cuerpo de masa m unidades técnicas de masa partiendo del reposo cae en un medio para el que la resistencia (lb) es proporcional al cuadrado de la velocidad (pies/seg.). Si la velocidad Terminal es 150 pies/seg. = 45,72 m/seg., hallar:

a) la velocidad al cabo de 2 segundos, y
b) el tiempo necesario para que la velocidad sea 100 pies/seg. = 30,48 m/seg.

Sea la velocidad del cuerpo al cabo de t segundos

Fuerza neta sobre el cuerpo = peso del cuerpo – resistencia y la ecuación del movimiento es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

Tomando g = 32 pies/seg ^{2} se puede simplificar la ecuación si se elige K = 2 mk^2

Entonces:

1) Se reduce a, $\frac{dv}{dt} = 2(16 - k^2v^2)$

De donde $\frac{dv}{k^2v^2 - 16} = -2dt$

Integrando $\ln\frac{kv-4}{kv+4} = -16kt + \ln C$ *o sea* $\frac{kv-4}{kv+4} = Ce^{-16kt}$

Para $t = 0$ $\quad v = 0$

Entonces $C = -1$

2) $\dfrac{kv-4}{kv+4} = -e^{-16kt}$

Para $t \to \infty$, $v = 150$

Entonces $e^{-16kt} = 0$ $\quad k = \dfrac{2}{75}$

3) Se convierte en $\dfrac{v-150}{v+150} = -e^{-0.43t}$

a) Si t = 2, $\dfrac{v-150}{v+150} = -e^{-0.86} = -0,423$ y v = 61 pies/seg. = 18,6 m/seg.

b) Si v = 100, $e^{-0.43t} = 0,2 = e^{-1.6}$ y t = 3,7 seg.

4.- Se aplica una fuerza de 24 Volt de Voltaje a un circuito en serie RL donde la resistencia de 12 Ohms y la inductancia de 4 Henrys. Determine a) la intensidad de la corriente cuando i (0) b) La carga de q (t).

V= 24 voltios
R= 12 ohms
L= 4 Henrys

$$V(\tau) = Vi + Vl$$

$$V(\tau) = Ri + \frac{di}{dt}$$

$$l\frac{di}{dt} + Ri = V$$

$$4\frac{di}{dt} + 12\,i = 24 \quad / \div 4$$

$$\frac{di}{dt} + 3\,i = 6$$

F.I $\ell^{\int 3\,dt} = \ell^{3t}$

$$\ell^{3t}\frac{di}{dt} + 3\ell^{3t} i = 6\ell^{3t}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\ell^{3t} i\right] = 6\ell^{3t}$$

$$\ell^{3t} i = 6\int \ell^{3t} dx = \frac{6}{3}\ell^{3t} + c$$

$$\ell^{3t} i = 2\ell^{3t} + c$$
$$i = 2 + c\ell^{-3t}$$
$$i(\tau) = c\ell^{-3t} + 2$$

$i=0;\ t=0$

$$0 = c\ell^{-30} + 2$$
$$0 = c + 2$$
$$c = -2$$

a) $$i(\tau) = -2\left[-\ell^{-t} + 1\right]$$

Como $i=\frac{dq}{dt}$

$$q(t) = \int i dt$$
$$q(t) = \int -2(\ell^{-3t} + 1)$$
$$q(t) = -2\int \ell^{-3t} dt - 2\int dt$$

$$u = -3t \rightarrow du = -3dt$$
$$-\frac{du}{3} = dt$$

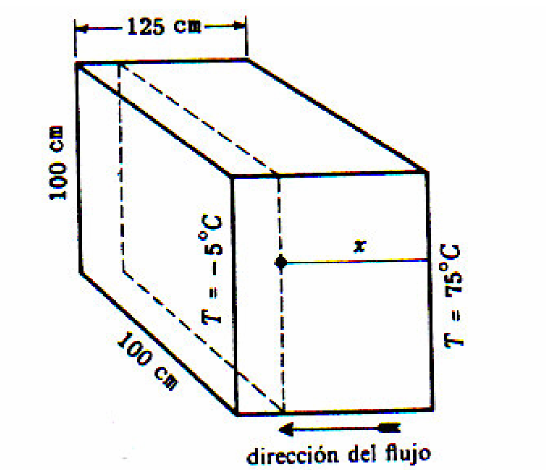
$$q(t) = -\frac{2}{3}\int \ell^{u} du - 2t$$
$$q(t) = -\frac{2}{3}\ell^{-3t} - 2t + c$$

5.- Bajo ciertas condiciones la cantidad constante Q calorías/segundo de calor que pasa a través de una pared esta dada por:

Q dx= -kAdt

donde k es la conductividad del material, A(cm^2) es la superficie de una cara de la pared perpendicular a la dirección del flujo y T es la temperatura x(cm) de esa cara, de forma que T disminuye cuando x aumenta. Hallar el número de calorías por hora del calor que pasa a través de 1 m^2 de la pared de una habitación frigorífica de 125 cm de espesor y k = 0.0025, si la temperatura de la cara interior es de -5ºC y la cara exterior es de 75ºC.

Sea x la distancia a que esta de la cara exterior un punto Interior de la pared.



Integrando dt = -Q dx desde x =0, T = 75 hasta x = 125, T = -5,

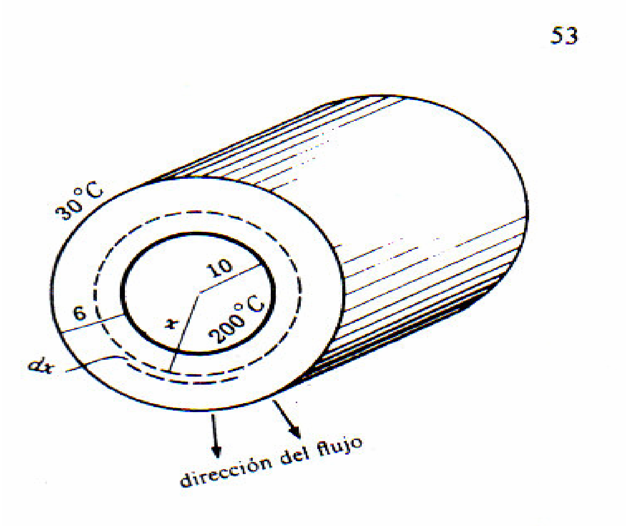
kA

$\int_{75}^{-5} dt = -\frac{Q}{kA} \int_{0}^{125} dx$; $80 = \underline{Q}(125)$, y

$Q = \frac{80kA}{125} = \frac{80(0.0025)(100)^2}{125} = 16 \frac{cal.}{seg}$

Luego el flujo de calor por hora = 3600Q = 57.600 cal.

6.- Un conducto de vapor de 20 cm de diámetro esta protegido por un recubrimiento de 6 cm de espesor para el que k =0.0003.a) Hallar la perdida de calor por hora a través de una longitud de un metro de la tubería si su superficie exterior del recubrimiento esta a 30ºC.b) Hallar la temperatura a una distancia x > 10 cm del centro de la tubería.



A una distancia x > 10 cm del centro de la tubería, el calor fluye a través de una capa cilíndrica de superficie $2\pi x$ cm^2 por centímetro de tubería. Del problema anterior.

$Q = -kA\frac{dT}{dx} = -2\pi k\frac{dT}{dx}$ de donde $2\pi k \, dT = -Q \frac{dx}{x}$

a) Integrando entre los limites T = 30. x = 16 y T = 200, x = 10

$2\pi k \int_{30}^{200} dT = -Q \int_{16}^{10} dx/x$, $340\pi k = Q(\ln 16 - \ln 10) = Q \ln 1.6$ y $Q = (340\pi k/\ln 1.6)$ cal/seg

Asi, pues, el calor perdido por hora a través de una longitud de un metro de tubería es $100(60)^2Q$ = 245.000 cal.

b) Integrando $2\pi k \, dT = (-340\pi k/\ln 1.6) \, dx/x$ entre los limites T = 30, x = 16 y T = T, x = x,

$\int_{30}^{T} dT = -170/\ln 1.6 \int_{16}^{x} dx/x$, $T - 30 = (-170/\ln 1.6)(\ln x/16)$ y $t = [30 + (170/\ln 1.6)(\ln 16/x)]$ ºC

Prueba: para x = 10, T = 30 + (170/ln 1.6)(ln 1.6) = 200ºC. para x = 16, T = 30 + 0 = 30ºC.

7.- Hallar el tiempo que se necesita para vaciar un tanque cilíndrico de radio 8 dm y altura 10 dm a través de un orificio redondo de radio 1/12 dm situado en el fondo del tanque, sabiendo que por un orificio de ese tipo sale el agua a una velocidad aproximada *v* = 4.8√h dm/seg, donde h es la altura del agua en el tanque.

Se puede asimilar el volumen de agua que sale por segundo a un cilindro de radi0 1/12 dm y altura *v*. Por tanto, el volumen que sale al cabo de dt segundos es

$$\pi(1/12)^2(4.8\sqrt{h})dt = \pi/144(4.8\sqrt{h})dt.$$

Designado por dh la correspondiente caída de nivel de agua en el tanque, el volumen de agua que sale también se puede dar por 64π. Luego

$\pi/144(4.8\sqrt{h})dt = -64\pi\, dh$ de donde $dt = -64(144)/4.8\, dh/\sqrt{h} = -1920\, dh/\sqrt{h}$

Integrando entre t = o, h = 10 y t = t, h = 0.

$\int_0^t dt = -1920 \int_{10}^{0} dh/\sqrt{h}$, y $t = -3840\sqrt{h}\Big]_{10}^{0} = 3840\sqrt{10}$ seg = 3 h 22 min.

8.- Se analizó un hueso fosilizado y se encontró que contenía la milésima parte de la cantidad original de c-14. Determinar la edad del fósil.

$A(t) = A_0e^{kt}$ → punto de partida.

Para calcular el valor de la constante de decaimiento aplicamos el hecho de que $A_0/2=A(5600)$,

$½ A_0= A_0e^{5600k} \rightarrow 5600k= \text{Ln}1/2= -\text{Ln}2$, de donde:

$$K= -(\text{Ln}2)/5600= -0.00012378$$

Por lo tanto $A(t)= A_0e^{-0.00012378t}$, luego para:

$A(t)= 1/1000\, A_0$, tenemos → $1/1000\, A_0e^{-0.00012378t}$

$\rightarrow$ -0.00012378t= Ln 1/1000= -Ln1000.

T= Ln1000/0.00012378 = 55.800 años.

9.- Un cultivo tiene una cantidad inicial de P_0 de bacterias cuando T= 1h, la cantidad de bacterias es de 3/2 P_0. Si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias presentes P(t) en el momento T, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de microorganismos.

Primero resolveremos la ecuación diferencial (1), reemplazando el símbolo X por P. Si t=0, la condición inicial es $P(0)=P_0$.

A continuación usaremos la observación empírica Q′ P(1)= $3/2P_0$, para determinar la constante de proporcionalidad K.

Dp/dt= K.P de forma estándar la ecuación diferencial lineal de primer orden.

Dp/dt-KP= 0 ; el factor integrante "F.I"= e^{-kt} $\rightarrow$al multiplicar ambos lados de la ecuación por este término, "e", integramos y se obtiene:

d/dt [e^{-kt}. P]= 0 y e^{-kt}.P=c

por lo tanto P(t)= c.$e^{kt}$$\rightarrow$cuando t=0 ; c.$e^0$=c

P(T)=$P_0e^{kt}$$\rightarrow$cuando t=1 ; entonces 3/2. Con la la ultima ecuación de Q′ se triplica la cantidad de bacterias, despejamos t de $3P_0$= $P_oe^{0.4055t}$. Por consiguiente 0.4055t= Ln y asi:

T= Ln/0.4055= 2.71h

10.- Un cuerpo que pesa 8 lb produce a un resorte un alargamiento de 2 pie, suponiendo que una fuerza de amortiguación numéricamente igual a 2 veces la velocidad instantánea, actúa sobre el sistema y que el cuerpo se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 3pies/seg, determine la ecuación del movimiento libre.

Por la Ley de Hooke se tiene que:

8= k (2) ; k= 4lb/pie

Puesto que el peso (w) del cuerpo esta relacionado con su masa (m), mediante w= m.g, entonces m= w/g.

Luego: $m= 8/32= ¼$ geolibra.

Por la ecuación diferencial del movimiento es entonces:

$$\frac{1}{4}\, d^2x/dt^2 + 2\, dx/dt + 4x=0 \quad ó \quad d^2x/dt^2 + 8\, dx/dt + 16x=0 \text{ (I)}$$

Las condiciones iniciales son: $x(0)= 0$, $dx/dt\,\big|_{t=0} = -3$.
La ecuación auxiliar de (I) es:

$$m^2 + 8m + 16= (m+4)^2=0$$

De modo que: $m_1= m_2= -4$

$$\text{Luego: } x(t)= C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}$$

La condición inicial $x(0)= 0$ entonces: $C_1=0$
Mientras que empleando $x'(0)= -3$ resulta que:

La ecuación del movimiento es:

$$X(t)= -3te^{-4t}.$$

11.- Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300°F. Después de tres minutos, de 200 °F. ¿En cuanto tiempo se enfriara hasta la temperatura ambiente de 70 °F?

De acuerdo a la ley de enfriamiento de newton se expresa con la ecuación diferencial de primer orden:

$dT/dt = k\,(T - T_m)$, Donde k es una constante de proporcionalidad, T(t)es la temperatura del objeto cuando $t > 0$ y T_m es la temperatura ambiente, o sea la temperatura que rodea al objeto.

Luego vemos que $T_m = 70$. Por consiguiente, debemos resolver el problema de valor inicial

$$dT/dt = k\,(T - 70),\quad T(0) = 300$$

Y determinar el valor de k, de tal modo que $T(3) = 200$.

La ecuación es lineal y separable, a la vez, al separar las variables

$$dT(\, T - 70\,) = k.dt,$$

obteniendo: $\ln|T - 70| = kt + C_1$, y asi $T = 70 + C_2e^{kt}$. Cuando $t = 0$, $T = 300$, de modo que $300 = C_2$ da a $C_2 = 230$. Entonces, $T = 70 + 230e^{kt}$. Por ultimo, la determinación de $T(3) = 200$ conduce a $e^{3k} = 13/23$, o sea, $k = 1/3 \ln 13/23 = -0.19018$. Así:

$$T(t) = 70 + 230e^{-0.19018t}.$$

12.- Un depósito contiene 500 litros de salmuera siendo la cantidad de sal en solución igual 100 kilogramos. Se introduce en el depósito una corriente de agua que contiene 100 gramos de sal por litro a una velocidad de 15 litros por minutos. La mezcla se mantiene se mantiene uniforme mediante una agitación adecuada y se le extrae del deposito a la misma velocidad anterior. ¿Hallar la cantidad de sal que contendrá el depósito al cabo 90 minutos?

Sea **q** (kilogramos) la sal que hay en el deposito al cabo de **t** (minutos), y dq/dt la velocidad de variación de dicha cantidad con el tiempo **t .**

En cada minuto llegan al depósito 1,5 kg de sal , y salen de él 0,03q kgr. Por tanto dq/dt,

$$1{,}5 \text{ kgr} - 0.03q,\ dq/(1{,}5 - 0{,}03q) = dt,$$

$$\ln|0{,}03q - 1{,}5| / 0{,}03 = -t + c$$

Para t = 0 , q = 100 y c = (ln1,5)/(0,03) ; Por consiguiente, ln 0,03q – 1,5 = -0,03t + ln1,5 . 0,03q – 1 = $e^{-0,03t}$ y q = 50 + 50$e^{-0,03t}$. Para t = 90 , q = 50 +50$e^{-2,7}$ = 53,35 kgr.

13.- Si la población de un país se duplica en 50 años, ¿en cuántos años será el triple suponiendo que la velocidad de aumento sea proporcional al número de habitantes?

Sea y la población a los t años e y_0 la población en el tiempo $t = 0$. Se puede escribir

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{y} = k\,dt,$$ siendo k el factor de proporcionalidad.

Primera solución. Integrando 1) se tiene 2) Ln $y = kt$ + Ln C, de donde $y = Ce^{kt}$.
Para $t = 0$, $y = y_o$ y, de 2), C = y_o. Luego 3) $y = y_o e^{kt}$.
Para $t = 50$, $y = 2y_o$. De 3), $2y_o = y_o e^{50k}$, de donde $e^{50k} = 2$.
Si $y = 3y_o$, 3) da $3 = e^{kt}$. Entonces, $3^{50} = e^{50kt} = (e^{50k})^t = 2^t$ y $t = 79$ años.

Segunda solución. Integrando 1) entre los limites t = o, $y = y_o$ y $t = 50$, $y = 2y_o$,

$$\int_{y_0}^{2y_0} \frac{dy}{y} = k \int_0^{50} dt, \qquad \ln 2y_0 - \ln y_0 = 50k \qquad \text{y} \qquad 50k = \ln 2.$$

Integrando 1) entre los limites t = o, $y = y_o$ y $t = t$, $y = 3y_o$,

$$\int_{y_0}^{3y_0} \frac{dy}{y} = k \int_0^{t} dt, \qquad \text{y} \qquad \ln 3 = kt.$$

Entonces 50 Ln 3 = 50^{kt} = t Ln 2 y $t = \dfrac{50 \ln 3}{\ln 2}$ = 79 años

14.- En cierto cultivo de bacterias la velocidad de aumento es proporcional al número presente. a) Si se ha hallado que el numero se duplica en 4 horas, ¿Qué número se debe esperar al cabo de 12 horas?, b) Si hay 10^4 al cabo de 3 horas y 4.10^4 al cabo de 5 horas, ¿Cuántos habría en un principio?

Sea x el número de bacterias a las t horas. Entonces,

$$1. \quad \frac{dx}{dt} = kx \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dx}{x} = k\, dt.$$

a) Primera solución. Integramos 1) se tiene 2) Ln $x = kt$ + Ln C, luego $x = Ce^{kt}$.

Suponiendo que $x = x_o$ para $t = 0$, $C = x_o$ y $y = x_oe^{kt}$.

Para $t = 4$, $x = 2x_o$. Entonces, $2x_o = x_oe^{4k}$ y $e^{4k} = 2$.

Si $t = 12$, $x = x_oe^{12k} = x_o(e^{4k})^3 = x_o(2^3) = 8x_o$, es decir, hay ocho veces el numero original.

Segunda solución. Integrando 1) entre los limites t = o, $x = x_o$ y $t = 4$, $x = 2x_o$,

$$\int_{x_0}^{2x_0} \frac{dx}{x} = k \int_0^4 dt, \qquad \ln 2x_0 - \ln x_0 = 4k \qquad \text{y} \qquad 4k = \ln 2.$$

Integramos 1) entre los límites $t = 0$, $x = x_0$ y $t = 12$, $x = x$,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = k \int_0^{12} dt, \qquad \text{y} \qquad \ln \frac{x}{x_0} = 12k = 3(4k) = 3 \ln 2 = \ln 8.$$

Luego $x = 8x_0$, como se obtuvo antes.

b) Primera solución. Cuando $t = 3$, $x = 10^4$. Luego de 2) $10^4 = Ce^{3k}$ y $C = \frac{10^4}{e^{3k}}$

Si $t = 5$, $x = 4.10^4$. Por tanto, $4.10^4 = Ce^{5k}$ y $C = \frac{4 \cdot 10^4}{e^{5k}}$.

Igualamos los valores de C, $\frac{10^4}{e^{3k}} = \frac{4 \cdot 10^4}{e^{5k}}$. Luego $e^{2k} = 4$ y $e^{k} = 2$.

Luego el numero original es $C = \frac{10^4}{e^{3k}} = \frac{10^4}{8}$ bacterias.

Aplicaciones físicas

Segunda solución. Integrando 1) entre los limites $t = 3$, $x = 10^4$ y $t = 5$, $x = 4.10^4$,

$$\int_{10^4}^{4 \cdot 10^4} \frac{dx}{x} = k \int_3^5 dt, \qquad \ln 4 = 2k \qquad \text{y} \qquad k = \ln 2.$$

Integramos 1) entre los limites $t = 0$, $x = x_0$ y $t = 3$, $x = 10^4$.

$$\int_{x_0}^{10^4} \frac{dx}{x} = k \int_0^3 dt, \qquad \ln \frac{10^4}{x_0} = 3k = 3 \ln 2 = \ln 8 \quad \text{y} \quad x_0 = \frac{10^4}{8} \text{ como antes.}$$

15.- Según la ley de Newton de enfriamiento, la velocidad a que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire. Si la temperatura del aire es 30º y la sustancia se enfría de 100 a 70º en 15 minutos, ¿Cuándo, será 40º la temperatura de la sustancia?

Sea T la temperatura de la sustancia a los t minutos.

Entonces, $\frac{dT}{dt} = -k(T-30)$ de donde $\frac{dT}{T-30} = -k\,dt.$

Nota: No es obligatorio poner aquí $-k$. Se hallara que k es positivo, pero si se pusiese $+k$ se hallaría en k es igualmente negativo.

Integrando en los limites $t = 0$, $T = 100$ y $t = 15$, $T = 70$,

$$\int_{100}^{70} \frac{dT}{T-30} = -k\int_0^{15} dt, \qquad \ln 40 - \ln 70 = -15k = \ln\frac{4}{7} \quad \text{y} \quad 15k = \ln\frac{7}{4} = 0{,}56.$$

Integramos entre los limites $t = 0$, $T = 100$ y $t = t$, $T = 40$,

$$\int_{100}^{40} \frac{dT}{T-30} = -k\int_0^{t} dt, \qquad \ln 10 - \ln 70 = -kt, \quad 15kt = 15\ln 7, \quad t = \frac{15\ln 7}{0{,}56} = 52\ \text{min.}$$

16.- Un reactor de reproducción convierte al uranio 238, relativamente estable, en plutonio, un isótopo radiactivo. Al cabo de 15 años, se tiene que se ha desintegrado 0.043% de la cantidad inicial, Δ_0 de una muestra de plutonio. Calcule la vida media de ese isótopo, si la rapidez de desintegración es proporcional ala cantidad restante.

Sea: $A_{(t)}$ cont de plutonio que queda en cualquier momento del t

$A_{(t)} = A \cdot e^{kt}$

$A_0 = 100\%$

$\frac{dA}{dt} = K A;$ $A_{(0)} = A_0$ $K=?$

$t=?$

- A – 0.043%

  100% - 0.043% = 99.957%

  Para calcular la constante K

  $0.99957\ A_0 = A_{(15)}$ 		$K = \frac{1}{15} \ln 0.99957$

  $0.99957\ A_0 = A_0\, e^{15k}$ 		$= -0.00002867$

  $1 A_{(t)} = A_0\, e^{-0.00002867t}$

  $A_{(t)} = \frac{1}{2} A_0$

  $\frac{1}{2} A_0 = A_0\, e^{-0.00002867t}$

  $\frac{1}{2} = -0.00002867t$ 		$t = \frac{\ln 2}{0.00002867} = 24.180$años

17.- Suponga que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa a su escuela donde hay 1000 estudiandotes . si se supone que la rapidez con que se propaga el virus es proporcional , no solo a la cantidad x de lumnos infectados sino tambien a la cantidad de alumnos no infectados , determine la cantidad de alumnos infectados seis dias después si se abserva que a los cuatro dias x(4)=50

Suponiendo que nadie sale durante la epidemia , debemos resolver el problema de valor inicial.

$$\frac{dx}{dt} = kx\,(100-x) \qquad x_{(0)} = 1$$

a = 1000k

b=k

$$x_{(t)} = \frac{100k}{k+999\,k\,e^{-1000kt}} = \frac{1000}{k+999k\,e^{-1}}$$

veamos x(4) = 50 y calculamos K

$$50 = \frac{1000}{1+999\,e^{-4000k}}$$

$$-1000k = \frac{1}{4} \ln \frac{19}{999} = -0.9906$$

$$X(t) = \frac{1000}{1+999\,e^{-0.9906t}}$$

$$X(6)= \frac{1000}{1+999\,e^{-5.9436}} = 276 \text{ alumnos}$$

18.- Cuando se combinan dos sustancias , a y b , se forma un compuesto c . La reaccion entre ambas es tal que por cada gramo de a se usan 4 gramos de b. Se observa que a los 10 minutos se han formado 30 gramos del producto c. Calcule la cantidad de c en funcion del tiempo si la realidad de la reaccion es proporcional a las cantidades de a y b que quedan si al principio hay 50 gramos de a y 32 gramos de b. ¿ que cantidad de compuesto c hay a los 15 minutos? Interprete la solucion cuando t → ∞

Sean X(t) los gramos del compuesto c presentes cuando el tiempo es t esta claro que
X(0) = 0 X(10) = 30 gr

$\frac{X}{5}$ gr de A y $\frac{4}{5}$ x gr de B

Cont. de A y B que quedan en cualquier momento son :

$$50-\frac{x}{5} \quad \text{y} \quad 32-\frac{4}{5}$$

La rapidez de formación del compuesto C satisface

$$\frac{dx}{dt}\ \alpha\ (50-\frac{x}{50})(32-\frac{4}{5}x)$$

sacamos $\frac{1}{5}$ del primer término

$\frac{4}{5}$ del segundo término

$$\frac{dx}{dt} = k\,(250-x)\,(40-x)$$

$$-\frac{\frac{1}{210}}{250-x}dx + \frac{\frac{1}{210}}{40-x}dx = k\,dt$$

Al integrar tenemos

$$\text{Ln } \frac{250-x}{40-x} - 210\,kt + c \quad \text{osea} \quad \frac{250-x}{40-x} = c_2\, e^{210kt}$$

Cuando t=0 , x= 0 $C_2 = \frac{25}{4}$

Usando x = 30 gr t=10

$$210\,k = \frac{1}{10}\ln\frac{28}{25} = 0.1258$$

$$X(t) = 1000\,\frac{1-e^{-0.1258t}}{25-4\,e^{-0.1258t}}$$

X →40 cuando t→α

Quiere decir que se forman 40 gr de la sustancia C y queda

$50-\frac{1}{5}(40)=42$ gr de A

$32-\underline{4}\,(40)=0$ gr de B

19.- Un barco que pesa 48.000 toneladas parte del reposo bajo el impulso de una fuerza propulsora constante de 200.000 lb. *a)* Hallar su velocidad como una función del tiempo *t*, sabiendo que la resistencia en libras es de 10.000*υ*, estando *υ* = velocidad medida en pies/segundo. *B)* Hallar la velocidad Terminal (esto es r cuando t → ∞) en millas por hora. (Tómese g = 32 pies/seg^2)

Como masa (unidades técnicas de masa) x aceleración (pies/seg^2) = Fuerza neta (lb) = Fuerza de propulsión – resistencia, se tiene $\frac{48.000(2000)}{32}\frac{d\upsilon}{dt}=200.000-10.000\upsilon$ de donde

$\frac{d\upsilon}{dt}+\frac{\upsilon}{300}=\frac{20}{300}$. Integrando, $\upsilon e^{t/300}=\frac{20}{300}\int e^{t/300}dt=20e^{t/300}+C$.

a) Para t=0, υ=0; C=-20 y υ=20-20e$^{-t/3000}$ = 20(1- e$^{-t/3000}$).
b) Cuando t → ∞, υ=20; la velocidad Terminal es 20 pies/seg^2 = 21.95 km/h. Esto también se puede obtener de 1) ya que, como υ se aproxima a un valor limite, $\frac{d\upsilon}{dt}\to 0$.Entonces, υ=20, como antes.

20.- Se está remolcando una barca a una velocidad de 12 millas por hora. En el momento (t = 0) que se suelta la cuerda de remolque, un hombre, que esta en la barca, comienza a remar siguiendo la dirección del movimiento y ejerciendo una fuerza de 20 lb. Si el peso conjunto del hombre y de la barca es de 480lb y la resistencia (lb) es igual a 1,75υ, donde υ está medido en pies/segundo, hallar la velocidad de la barca después de ½ minuto.

Como masa (unidades técnicas de masa) x aceleración (pies/seg^2) = Fuerza neta (lb) = Fuerza de propulsión – resistencia, se tiene $\frac{480}{32}\frac{d\upsilon}{dt}=20-1{,}75\upsilon$ de donde $\frac{d\upsilon}{dt}+\frac{7\upsilon}{60}=\frac{4}{3}$. Integrando, $\upsilon e^{7t/60}=\frac{4}{3}\int e^{7t/60}dt=\frac{80}{7}e^{7t/60}+C$.

Para t=0, υ=$\frac{12(5280)}{(60)^2}=\frac{88}{5}$; C=$\frac{216}{35}$ y υ=$\frac{80}{7}+\frac{216}{35}e^{-7t/60}$.

Para t=30, υ=$\frac{80}{7}+\frac{216}{35}e^{-3,5}=11.6\,pies/seg=3{,}5\,m/seg$.

21.- Una masa es arrastrada por el hielo sobre un trineo; incluida el trineo, el peso total es de 80 lb. Suponiendo que es despreciable la resistencia del hielo a los corredores y que el aire opone una resistencia en libras igual a 5 veces la velocidad (υ pies/seg.) del trineo, hállese:
***a)* la fuerza constante ejercida sobre el trineo para obtener una velocidad final de 10 millas por hora, y**
***b)* la velocidad y la distancia recorrida al cabo de 48 segundos.**

Como masa (unidades técnicas de masa) x aceleración (pies/seg^2) = Fuerza neta (lb) = Fuerza de propulsión – resistencia, se tiene $\frac{80}{32}\frac{d\upsilon}{dt} = F - 5\upsilon$ ó $\frac{d\upsilon}{dt} + 2\upsilon = \frac{2}{5}F$, donde F (lb) es la fuerza hacia delante. Integrando, $\upsilon = \frac{F}{5} + Ce^{-2t}$. Si t=0, υ=0; entonces, $C = -\frac{F}{5}$ y A) $\upsilon = \frac{F}{5}(1 - e^{-2t})$.

a) Cuando t→∞, $\frac{F}{5}$ = υ= $\frac{10(5280)}{(60)^2} = \frac{44}{3}$. La fuerza perdida es F= $\frac{220}{3} lb = 33{,}26 kg$.

b) Sustituyendo a) en A), $\upsilon = \frac{44}{3}(1 - e^{-2t})$

Para t=48, $\upsilon = \frac{44}{3}(1 - e^{-96}) = \frac{44}{3}\, pies/seg = 4{,}47 m/seg$.

$$s = \int_0^{48} \upsilon\, dt = \frac{44}{3}\int_0^{48}(1 - e^{-2t})dt = 697 pies = 212.45 m.$$