SUCESIONES MONÓTONAS Y ACOTADAS

SUCESIÓN MONÓTONA

Definición. Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es:

$$(i)\ Creciente\ \ si\ a_n \leq a_{n+1}\ \ para\ toda\ n;$$
$$(ii)\ Decreciente\ \ si\ \ a_n \geq a_{n+1}\ \ para\ toda\ n.$$

Si una Sucesión es creciente o decreciente, se llama Monótona.

$$(i)\ Si\ \ a_n < a_{n+1}\ \ es\ estrictamente\ creciente.$$
$$(ii)\ \ Si\ \ a_n > a_{n+1}\ \ es\ estrictamente\ decreciente.$$

Ejercicios.

Identificar si las siguientes secuencias son crecientes, decrecientes o no monónotas.

$$a)\ \ \left\{\frac{n}{2n+1}\right\} \qquad b)\ \ \left\{\frac{1}{n}\right\} \qquad c)\ \ \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$$

$a)\ \ \left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$

Tenemos que:

$$a_n = \frac{n}{2n+1} \qquad y \qquad a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$$

Luego:

$$\left\{\frac{n}{2n+1}\right\} = \frac{1}{3}, \ \frac{2}{5}, \ \frac{3}{7}, \ \frac{4}{9}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \ \frac{n+1}{2n+3}$$

Observando a los elementos de la sucesión, creemos que crece, así que:

$$\frac{n}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+3} \quad \rightarrow \quad n(2n+3) \leq (n+1)(2n+1)$$

$$2n^2 + 3n \leq 2n^2 + 3n + 1$$

La inecuación corrobora el crecimiento de la sucesión, por lo tanto la sucesión es creciente (**Monótona**).

$b)\ \left\{\frac{1}{n}\right\}$

Tenemos que:

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad y \qquad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Luego:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1,\ \ \frac{1}{2},\ \ \frac{1}{3},\ \ \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

Observando a los elementos de la sucesión, creemos que decrece, así que:

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} \qquad \to \qquad n+1 \geq n$$

La inecuación demuestra nuestra observación de decrecimiento en la sucesión (**Monótona**).

$c)\ \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

Tenemos que:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad y \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$$

Luego:

$$\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = 1,\ \ -\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{3},\ \ -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \qquad \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$$

Observando a los elementos la sucesión no crece ni decrece, existe una alternabilidad de valores positivos y negativos, por lo tanto la sucesión es **No Monótona**.

SUCESIÓN ACOTADA

Definición. Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es acotada si y sólo si tiene una cota superior y una cota inferior.

Ejercicios.

$a)\ \left\{\frac{n}{2n+1}\right\} = \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7}, \dots$

Como se puede observar, la sucesión crece por lo tanto la cota inferior es $\frac{1}{3}$.

La cota superior la podemos determinar aplicando el límite cuando n tiende a infinito a a_n

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Entonces; $\frac{1}{3} \leq a_n \leq \frac{1}{2}$

$b)\ \left\{\frac{1}{n}\right\} = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \dots$

Como se puede observar, la sucesión decrece por lo tanto la cota superior es 1.

La cota inferior la podemos determinar aplicando el límite cuando n tiende a infinito a a_n.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Entonces; $0 \leq a_n \leq 1$

Teorema.

$$\textit{Cuando } \{a_n\} \textit{ es creciente, el } \lim_{n\to+\infty} \{a_n\} \textit{ es la cota superior}$$
$$\textit{Cuando } \{a_n\} \textit{ es decreciente, el } \lim_{n\to+\infty} \{a_n\} \textit{ es la cota inferior}$$

Teorema.

(i) Una sucesión monótona acotada es convergente

(ii) Una sucesión monótona convergente es acotada

Ejercicios.

1.- Determine si $\left\{\frac{n^2+3}{n+1}\right\}$ es acotada

La sucesión debe ser monótona convergente.

a) **Monótona.**

$$\left\{\frac{n^2+3}{n+1}\right\} = 2,\ \frac{7}{3},\ 3,\ \frac{19}{5},\ldots$$

La sucesión crece, de acuerdo a la naturaleza de sus elementos, entonces:

$$\frac{n^2+3}{n+1} \leq \frac{(n+1)^2+3}{n+2}$$

$$(n+2)(n^2+3) \leq (n+1)[(n+1)^2+3]$$

$$n^3+2n^2+3n+6 \leq (n+1)(n^2+2n+4)$$

$$n^3+2n^2+3n+6 \leq n^3+2n^2+4n+n^2+2n+4$$

$n^3+2n^2+3n+6 \leq n^3+3n^2+6n+4$ se constata que la sucesión crece…

b) **Convergente**

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{n^2+3}{n+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{0^+} = +\infty$ Para este caso, la sucesión no tiene límite, entonces es No Convergente.

Conclusión: La Sucesión es **No Acotada**.

2.- Demuestre que la sucesión $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ es convergente

La sucesión debe ser Monótona Acotada.

a) **Monótona**

$$\left\{\frac{2^n}{n!}\right\} = 2,\ 2,\ \frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ldots$$

De acuerdo a los elementos de la sucesión, ésta decrece, veamos comparando el último y penúltimo elemento.

$$\frac{2^n}{n!} \geq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \quad \rightarrow \quad (n+1)!\ 2^n \geq 2^{n+1}\ n!$$

$$(n+1)!\,2^n \geq 2^n\ 2(n!) \quad \rightarrow \quad (n+1)! \geq 2n!$$

$$(n+1)n! \geq 2n! \quad \rightarrow \quad n+1 \geq 2$$

La inecuación se cumple, entonces la sucesión es monótona.

b) Acotada

Observando los elementos de la sucesión, se evidencia que decrece entonces la cota superior es 2. Determinaremos la cota inferior aplicando el límite al infinito.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^1.2^2.2^3.2^4.2^5\ldots\ldots..2^n}{1.2.3.4.5.6.7.8\ldots n}\right)$$

Se puede instuir que todos los elementos del numerador se pueden eliminar con algunos del denominador, es por ello que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right)=\frac{1}{+\infty}=0$$

Luego: $0 \leq a_n \leq 2$

Conclusión: La sucesión es **Convergente**, ya que es Monótona acotada.

PARA VOLVER AL MENÚ ANTERIOR PRESIONE Series y Sucesiones
EN EL MENU PRINCIPAL