SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS NUMÉRICOS

(llamada también: SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS CONSTANTES)

Definición. Si $\{u_n\}$ es una sucesión y

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

Entonces la sucesión $\{S_n\}$ se llama SERIE INFINITA.

Teorema (I)

Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie infinita dada, y sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales que definen esta serie infinita. Entonces, si $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe y es igual a *S*, decimos que la serie dada es CONVERGENTE y que *S* es la suma de la serie infinita dada.

Si $\lim_{n\to+\infty} S_n$ no existe se dice que la serie es DIVERGENTE y la serie no tiene suma.

Teorema (II)

Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

IMPORTANTE: El recíproco de este teorema no es válido, es decir, toda serie cuyo límite al infinito sea cero no necesariamente es convergente.

Ejercicios.

1.- Demostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$ es una serie divergente.

Determinamos el límite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1,$$

la serie es divergente

2.- Determinar si $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Esta serie puede ser Convergente o Divergente, no podemos concluir.

Definición.

Si $S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ $\quad y \quad$ $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$ entonces

$S_n = S_{n-1} + u_n$

Ejemplo: Dada la serie infinita, determine una fórmula para S_n en términos de:

$$S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Determinamos términos de la secuencia de sumas parciales

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

S_n debe ser expresados en términos de n. $S_n = S_{n-1} + u_n$. Determinamos u_n.

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Por fracciones parciales: $\quad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Como $\quad S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Si $n \to +\infty$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ la suma total de la serie es 1 (Converge)

Teorema (III)

La diferencia de dos sumas parciales $S_R \; y \; S_T$ de una serie convergente se puede hacer tan pequeña como queramos, tomando *R* y *T* lo suficientemente grandes.

Veamos:

$$S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$S_{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

$$S_{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Hacemos la diferencia:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Esta diferencia al contrario, aumentará indefinidamente, por lo tanto, S_n es divergente.

SERIE ARMÓNICA

Forma General:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Característica importante: De acuerdo al teorema (III) esta serie es Divergente.

SERIE GEOMÉTRICA

Forma General:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a.r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

Donde: a y r son constantes.

La suma de la serie armónica viene dada por:

$S_n = a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})$

De la identidad:

$1 - r^n = (1 - r)(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})$

Tenemos:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad si \quad r \neq 1$$

Convergencia y divergencia de la serie geométrica

Teorema (IV)

$Si\ |r| < 1, \qquad la\ serie\ geométrica\ converge$

$Si\ \ |r| \geq 1, \quad la\ serie\ geométrica\ diverge$

Ejemplo: Analizar $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

Podemos escribir esta serie así:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Tenemos que $r = \frac{1}{2}$, entonces la serie geométrica converge.

Teorema (V)

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ son dos series infinitas que solamente difieren en sus primeros términos, entonces ambas series convergen o ambas series divergen.

Ejercicios.

1.- Determinar si la serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+4}\right)$ es convergente o divergente.

Veamos los elementos de la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{n+4} + \cdots$$

Por otro lado, la serie armónica que sabemos que es divergente, es:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Si observamos los elementos de las dos series, éstos difieren en sus primeros elementos pero después se vuelven idénticas, entonces de acuerdo al teorema (V) la serie dada es divergente.

Teorema (VI)

Sea c cualquier constante diferente de cero:

(i) *Si la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *es convergente, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} c.u_n$ *también es convergente*

(ii) *Si la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *es divergente, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} c.u_n$ *también es divergente.*

Teorema (VII)

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ son series infinitas convergentes de sumas S y R, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n)$ es una serie convergente de suma $S \pm R$.

Teorema (VIII)

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es divergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ es divergente.

Ejemplo:

Determinar si $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{4^n}\right)$ es convergente o divergente

Podemos analizar la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{4^n}\right)$ en sus dos términos.

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}$ es una serie geométrica con $|r| = \frac{1}{4} < 1$, es convergente

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n}$ es divergente ya que es una serie armónica $\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

Luego la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4n}+\frac{1}{4^n}\right)$ es divergente

PARA VOLVER AL MENÚ ANTERIOR PRESIONE Series y Sucesiones
EN EL MENU PRINCIPAL