SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS POSITIVOS

Teorema (I).
Una serie infinita de términos positivos es convergente si y sólo si su sucesión de sumas parciales tiene una cota superior.

Teorema (II). PRUEBA DE COMPARACIÓN
Sea la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie de términos positivos:

(i) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} V^n$ es una serie de términos positivos que se sabe que es convergente y $U_n \leq V_n$ para todo entero positivo n, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ es convergente.

(ii) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} W_n$ es una serie de términos positivos que se sabe que es divergente y $U_n \geq W_n$ para todo entero positivo n, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ es divergente.

Ejemplo: Determinar si la serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n+1}$ es convergente o divergente.

Veamos los elementos de la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n+1} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{4}{28} + \cdots + \frac{4}{3^n+1} + \cdots$$

La serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \cdots + \frac{4}{3^n}$$

Es convergente porque $r = \frac{1}{3} < 1$

Como $\frac{4}{3^n} > \frac{4}{3^n+1}$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n+1}$ es convergente.

Teorema (III). PRUEBA DE COMPARACIÓN DEL LÍMITE
Sean $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ dos series de términos positivos:

$(i)\ Si\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right) = c > 0,$ entonces ambas series convergen o divergen.

$(ii)\ Si\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right) = 0, \quad y\ si\ \sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ converge.

$(iii)\ Si\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right)=+\infty,\quad y\ \ si\ \ \sum_{n=1}^{+\infty}V_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty}U_n$ diverge.

Ejemplo: Verifique por el Teorema de Comparación del límite si $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{3^n+1}$ es convergente.

Sabemos que la serie geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{3^n}$ converge, entonces:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{4}{3^n+1}}{\frac{4}{3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{3^n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+3^{-n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{3^n}}=1$$

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{3^n+1}$ también es convergente.

Teorema (IV). PRUEBA DE LA INTEGRAL

Sea f una función que es continua, decreciente y de valores positivos para toda $x\geq 1$. Entonces, la serie infinita:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)+\cdots$$

Es convergente si la integral impropia

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx \quad \text{existe,}$$

Y es divergente si $\lim_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)dx=+\infty$

Ejemplo: Utilice la prueba de la integral para demostrar que la serie p diverge si $p\leq 1$ y converge si $p>1$.

La serie p es $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ Si $f(x)=\frac{1}{x^p}$, entonces f es continua y tiene valores positivos para $x\geq 1$. Además es decreciente para $x\geq 1$. Entonces aplicamos la prueba de la integral:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p}$$

Si $p=1$, $\lim_{b\to+\infty}ln|x|\Big\{_1^b=\lim_{b\to+\infty}ln|b|=+\infty$ la serie diverge en p=1

SI $p\neq 1$, $\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big\{_1^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p}\begin{Bmatrix} Si\ \ p<1\ \ el\lim es+\infty \\ Si\ \ p>1\ \ el\lim es-\frac{1}{1-p}\end{Bmatrix}$

$$\left\{\begin{matrix} Si\ \ p<1\ \ el \lim es + \infty & DIVERGE \\ Si\ \ p>1\ \ el \lim es -\frac{1}{1-p} & CONVERGE \end{matrix}\right\}$$ SIEMPRE QUE $p \geq 0$

PARA VOLVER AL MENÚ ANTERIOR PRESIONE Series y Sucesiones
EN EL MENU PRINCIPAL