SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS POSITIVOS Y NEGATIVOS

Definición. Si $a_n > 0$ para todo entero positivo n, entonces la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots$$

Y la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n}a_n + \cdots$$

Son series alternas o alternantes.

Si los números $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ son alternadamente positivos y negativos, $|u_{n+1}| < |u_n|$ para todo entero positivo n y $\lim_{n\to+\infty}|u_n| = 0$, entonces la serie alterna $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es convergente.

Ejemplo: Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ es convergente o divergente.

Planteamos los elementos $u_n \quad y \quad u_{n+1}$:

$$u_n = (-1)^n\left[\frac{n+2}{n(n+1)}\right] \qquad y \qquad u_{n+1} = (-1)^{n+1}\left[\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}\right]$$

Aplicamos el teorema:

$$\left|\frac{n+2}{n(n+1)}\right| > \left|\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}\right|$$

$$(n+1)(n+2)^2 > (n^2+n)(n+3)$$

$$n^3 + 4n^2 + 4n + n^2 + 4n + 4 > n^3 + 4n^2 + 3n$$

$$n^3 + 5n^2 + 5n + 4 > n^3 + 4n^2 + 3n \qquad \text{se cumple}$$

Determinamos el límite al infinito de $|u_n|$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n+2}{n(n+1)}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{0}{1} = 0$$

También se cumple.

Luego, la serie es convergente

Definición. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ es convergente.

Teorema (II). PRUEBA DE LA RAZÓN.
Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ una serie infinita dada para toda u_n diferente de cero, entonces:

(i) Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L < 1$, la serie dada es absolutamente convergente.

(ii) Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L > 1$, ó si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = +\infty$, la serie es divergente.

(iii) Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$, no se puede concluir.

Ejemplo: Determine si $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^n}$ es convergente o divergente.

$$|u_n| = \frac{n}{2^n} \quad y \quad |u_{n+1}| = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Aplicando la prueba de la razón tenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)2^n}{n(2^n.2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

La serie es absolutamente convergente

PARA VOLVER AL MENÚ ANTERIOR PRESIONE Series y Sucesiones
EN EL MENU PRINCIPAL