# SERIES DE POTENCIAS

**Definición**.
Una serie de potencias en $(x-a)$ es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots$$

**Ejercicios.**

1.- Determine los valores de $x$ para los cuales $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n3^n}$ es convergente.

Planteamos $|u_n|$ $y$ $|u_{n+1}|$

$$|u_n| = \frac{2^n x^n}{n3^n} \quad y \quad |u_{n+1}| = \frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$$

Aplicamos la prueba de la razón, teniendo que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{2^n x^n}{n3^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{2x^{n+1}}{3(n+1)}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{2x}{3n+3}}{\frac{1}{n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2nx}{3n+3}\right| = \frac{2}{3}|x|$$

Es convergente cuando $\frac{2}{3}|x| < 1$ , $|x| < \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$

2.- Determinar los valores de $x$ para los cuales la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ es convergente.

Aplicamos la prueba de la razón:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)n!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|$$

$$\lim_{n\to+\infty}|x|\left|\frac{1}{n+1}\right| = |x|(0) = 0 < 1$$

La serie es absolutamente convergente para todo $x$.

3.- Determinar los valores de $x$ para los cuales la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\,x^n$ es convergente.

Aplicamos la prueba de la razón

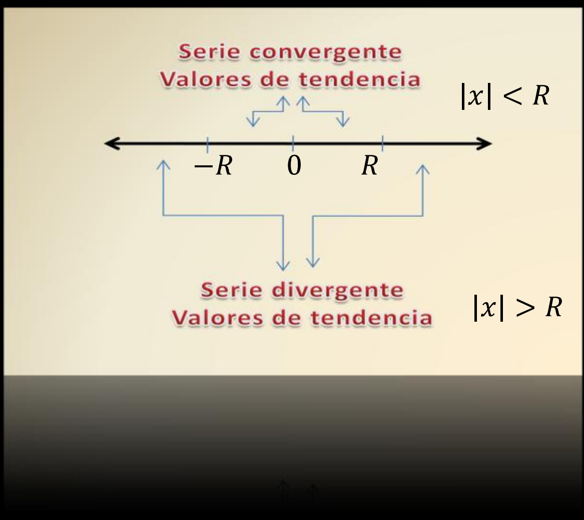
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)n!\,x^n x}{n!\,x^n}\right|$$

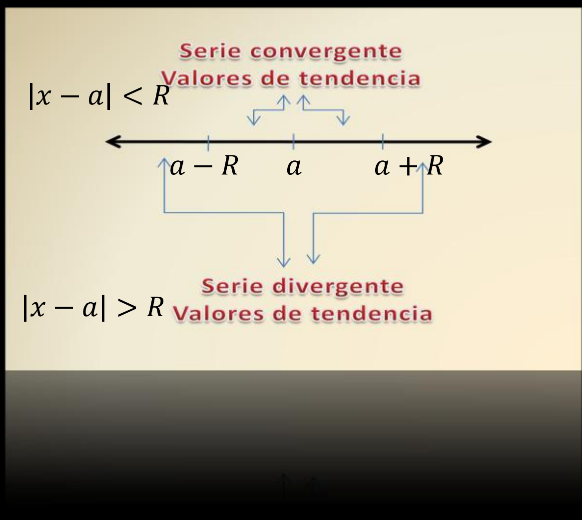
$$= |x|\lim_{n\to+\infty}(n+1) = |x|\infty \begin{cases} 0 & si\ \ x=0 \\ \infty & si\ \ x\neq 0 \end{cases}$$

La serie es divergente para todo $x \neq 0$ y convergente para $x = 0$

**Teorema (I).**
Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ una serie de potencias dada. Entonces se cumple exactamente una de las siguientes condiciones:

(i) La serie converge sólo cuando $x = 0$
(ii) La serie es absolutamente convergente para todo $x$
(iii) Existe un número $R > 0$ tal que la serie es absolutamente convergente para todos los valores de $x$ para los cuales $|x| < R$ y es divergente para todos los valores de $x$ para los cuales $|x| > R$.




**Ejemplos.**

1.- Determinar el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n(x-2)^n$

Aplicando la prueba de la razón, tenemos:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)(x-2)^{n+1}}{n(x-2)^n}\right| = |x-2|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = |x-2|$$

La serie es absolutamente convergente en $|x-2|<1, \quad -1<x-2<1$

$$1<x<3$$

Evaluamos los extremos 1 y 3.

*Si $x=1$, la serie es $\sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^n$ la cual es divergente porque $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.

*Si $x=3$, la serie es $\sum_{n=1}^{+\infty} n(1)^n$ la cual es divergente porque $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.

Entonces el intervalo de convergencia es (1,3)

2.- Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2+n^2}$

Aplicando la prueba de la razón, tenemos:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{2+(n+1)^2}}{\frac{x^n}{2+n^2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^n x}{2+(n+1)^2}}{\frac{x^n}{2+n^2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}|x|\left|\frac{2+n^2}{2+(n+1)^2}\right|$$

$$= |x|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2+n^2}{2+(n+1)^2}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2+n^2}{2+n^2+2n+1}\right| = |x|$$

Es absolutamente convergente si $|x|<1, \quad -1<x<1$

Evaluamos los extremos:

*Si $x=1$, la serie es $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1)^n}{2+n^2}$, es decir $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2+n^2}$

Como $\frac{1}{2+n^2} < \frac{1}{n^2}$ para todo $n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie $p$ convergente entonces la serie dada en $x=1$ es convergente.

*Si $x=-1$, la serie es $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2+n^2}$

Serie alterna, $|u_{n+1}|<|u_n|$ y $\lim_{n\to+\infty}|u_n|=0$ para que sea convergente, luego:

$\frac{1}{2+(n+1)^2} < \frac{1}{2+n^2} \quad \to \quad 2+n^2 < 2+(n+1)^2$ se cumple, ahora el límite:

$\lim_{n\to+\infty}|u_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+n^2} = 0$, luego la serie dada en $x=-1$ es convergente

Luego, el intervalo de convergencia para la serie es [-1, 1].

PARA VOLVER AL MENÚ ANTERIOR PRESIONE Series y Sucesiones
EN EL MENU PRINCIPAL