SERIES DE POTENCIAS

DIFERENCIACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

Teorema (II).
Si $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ es una serie de potencias con un radio de convergencia $R > 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} nC_n x^{n-1}$ también tiene a R como su radio de convergencia.

Teorema (III).
Si el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ es $R > 0$, entonces R también es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$.

Teorema (IV).
Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ define una función cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie, donde:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n \quad y \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nC_n x^{n-1} \quad existen\ para\ x\ en\ (-R, R)$$

Ejercicios.

1.- Verificar el teorema (II) en la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

Aplicando la prueba de la razón, tenemos:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+2}}{(n+2)^2}}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^n x^2}{(n+2)^2}}{\frac{x^n x}{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x(n+1)^2}{(n+2)^2}\right|$$

$= |x| < 1, \quad -1 < x < 1$ radio de convergencia $R = 1$

Evaluamos la derivada:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)' = \frac{(n+1)}{(n+1)^2}x^n = \frac{x^n}{n+1} \quad \to \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

Aplicamos la prueba de la razón:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+2}}{\frac{x^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^n x}{n+2}}{\frac{x^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x(n+1)}{n+2}\right| = |x|$$

$-1 < x < 1$ radio de convergencia $R' = 1$

2.- Determine el dominio de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

De acuerdo al ejercicio anterior, el intervalo de convergencia de la serie asociada a esta función es $-1 < x < 1$. Entonces vamos a verificar los extremos para construir el conjunto de valores dominio de $f(x)$.

- Si $x = 1$, la serie es:
  $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ la cual es convergente porque es la serie p con $p = 2$.

- Si $x = -1$, la serie es:
  $f(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$, la cual es convergente porque $\lim_{n\to+\infty}|u_n| = 0$ y $|u_{n+1}| < |u_n|$ Veamos:
  $$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| = 0 \quad \text{se cumple}$$
  $$|u_{n+1}| < |u_n| \quad \rightarrow \quad \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{(n+1)^2} \quad \rightarrow \quad (n+1)^2 < (n+2)^2 \quad \text{se cumple}$$

Entonces el dominio de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ es [-1, 1]

Teorema (V).
Si una función f está definida por una serie de potencias, y esta serie de potencias se diferencia término a término, la serie de potencias resultante (la cual define a f') tiene el mismo radio de convergencia pero no necesariamente el mismo intervalo de convergencia.

Ejemplo. Podemos demostrar este teorema determinando el dominio de $f'(x)$ en el ejemplo anterior.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

Sabemos que esta serie tiene un radio de convergencia de 1, $-1 < x < 1$
Evaluaremos sólo los extremos para hallar el intervalo de convergencia y compararlo con el de $f(x)$:

- Si $x = -1$ la función es $f'(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

  $$|a_n| > |a_{n+1}| \quad \rightarrow \quad \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| > \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\right| \rightarrow \quad \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2}$$
  $$n+2 > n+1 \quad \textit{se cumple}$$

  Comprobamos el límite:
  $$\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$
  Luego $f'(x)$ es convergente en $x = 1$.

- Si $x = 1$ la función es $f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1)^n}{n+1}$

  Esta función es continua, decreciente y de valores positivos, por ello:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+1} = ln|x+1| \Big\{ {}^{+\infty}_{1} = \ln(\infty) - \ln(1) = \infty$$

En este valor de x la serie diverge, por lo tanto el intervalo de Convergencia es [-1, 1). Y el dominio de $f'(x)$ es [-1,1). Nótese que el dominio de $f(x)$ es [-1, 1] lo que demuestra que las dos funciones pueden tener el mismo radio de convergencia pero no necesariamente el mismo intervalo de convergencia.

Ejercicios.

1.- Demostrar que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todos los valores reales de x.

En la sección anterior se ha demostrado que esta serie es absolutamente convergente para todo x. (Prueba de la razón).

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ donde Dom:(-∞, +∞)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n(n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Por lo tanto queda demostrado que $f(x) = f'(x)$

2.- Represente en serie de potencias e^{-x}.

$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ para todo valor real x

3.- Obtener una representación de serie de potencia de $\frac{1}{(1-x)^2}$

Sabemos que:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \qquad si \quad |x| < 1$$

Si derivamos, término a término, obtenemos la representación solicitada:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \qquad si \quad |x| < 1$$

PARA VOLVER AL MENÚ ANTERIOR PRESIONE Series y Sucesiones
EN EL MENU PRINCIPAL