SERIES DE POTENCIAS

<u>INTEGRACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS</u>

Teorema (VI).
Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R > 0$. Entonces, si f es la función definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$, f es integrable en todo subintervalo cerrado de $(-R, R)$ y evaluamos la integral de f integrando término a término la serie de potencias dada; es decir si x está en $(-R, R)$, entonces:

$$\boxed{\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_n}{n+1} x^{n+1}}$$

Ejercicios.

1.- Represente en serie de potencias a $\int_0^x e^{-t^2}.dt$

Partimos desde la representación de e^x.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \to \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \cdots$$

Luego:

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x \frac{t^4}{2} dt - \int_0^x \frac{t^6}{6} dt + \cdots + \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$$

2.- Obtener una representación en serie de potencias de $\ln(1+x)$.

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots \quad si \quad |t| < 1$$

Aplicamos la integración definida:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt \qquad si\ |x| < 1$$

$$\ln(1+t) \Big\{_0^x = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + \cdots \Big\{_0^x$$

Evaluamos:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

3.- Obtener una representación, en serie de potencias, de $tg^{-1}x$.

Sabemos que:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Integramos:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$tg^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad si \quad |x| < 1$$

4.- Obtener una representación de serie de potencia de $\frac{1}{(1-x)^2}$

Por la serie del binomio se tiene que:

$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}$

Sustituyendo a x por $-x$ y $m = -2$, entonces:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 - 2(-x) - \frac{2(-3)}{2!}x^2 - \frac{2(-3)(-4)}{3!}(-x)^3 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

Manera alternativa:

Siendo $m = -1$ y sustituyendo a x por $-x$, queda:

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + x^3 + \cdots + x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Si derivamos queda:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

5.- Determine por series el valor de $\int_2^3 \frac{dx}{4-x}$

Haciendo $m=-1$ y sustituyendo $x\ por -\frac{x}{4},$ tenemos:

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\frac{x}{4}}\right]=\frac{1}{4}\left[1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{16}-\frac{x^3}{64}+\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{4^n}\right]$$

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4}-\frac{x}{4^2}+\frac{x^2}{4^3}-\frac{x^3}{4^4}+\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{4^{n+1}}$$

Integramos:

$$\int_2^3 \frac{1}{4-x}=\int_2^3 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{4^{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}\begin{cases}3\\2\end{cases}$$

Evaluamos:

$$\int_2^3 \frac{1}{4-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n[3^{n+1}-2^{n+1}]}{(n+1)4^{n+1}}$$

Calculamos:

$$\int_2^3 \frac{1}{4-x}=\frac{3-2}{4}-\frac{9-4}{2(16)}+\frac{27-8}{3(64)}-\frac{3^4-2^4}{4(4)^4}+\cdots+\frac{(-1)^n[3^{n+1}-2^{n+1}]}{(n+1)4^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{5}{32}+\frac{19}{192}-\frac{65}{1024}+\cdots$$
$$=0{,}25-0{,}15625+0{,}09895-0{,}06348+\cdots\cong 0{,}693147$$

6.- Determine por series el valor de ln|2|.

Por la serie del binomio con $m=-1$, tenemos:

$$\frac{1}{x+1}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots x^n(-1)^n$$

Integramos:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\frac{x^{n+1}}{n+1}(-1)^n\begin{cases}1\\0\end{cases}$$

Evaluamos:

$$ln|2|=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots.\frac{x^{n+1}}{n+1}(-1)^n$$

PARA VOLVER AL MENÚ ANTERIOR PRESIONE Series y Sucesiones
EN EL MENU PRINCIPAL