UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO BOLÍVAR
UNIDAD DE ESTUDIOS BÁSICOS
ÁREA DE MATEMÁTICAS
MATERIA: MATEMÁTICAS IV
PROF: JOSÉ GREGORIO PÁEZ V.

UNIDAD I.
ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN
EJERCICIOS

1.- Obtenga la Ecuación Diferencial que da origen a cada una de las siguientes soluciones.

$a.\quad y = sen(x) - 1 + ce^{-senx}$ $\qquad R: \quad \dfrac{dy}{dx} = Cos(x)\left(1 - ce^{-senx}\right) \qquad c: const.$

$b.\quad y = c_1 x + \dfrac{c_2}{x} + c_3$ $\qquad R: \quad \dfrac{dy}{dx} = c_1 - \dfrac{c_2}{x^2}$

$c.\quad y = c_1 e^{bsen^{-1}x} + c_2 e^{-bsen^{-1}x}$ $\qquad R: \quad \dfrac{dy}{dx} = b.ctg(x).Csc(x)\left[-c_1 e^{b/senx} + c_2 e^{-b/senx}\right]$

$d.\quad y = cx + c - c^2$ $\qquad R: \quad \dfrac{dy}{dx} = c$

$e.\quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x}$ $\qquad R: \quad \dfrac{dy}{dx} = e^x(c_1 + c_2 + c_2 x) - c_3 e^{-x}$

$f.\quad y = e^{cx}$ $\qquad R: \quad \dfrac{dy}{dx} = ce^{cx}$

2.-Demuestre que las siguientes Ecuaciones Diferenciales aceptan como solución la función que se indica en cada caso.

$a.\quad y`` + y = 0, \qquad \left\{ y = c_1 \cos x + c_2 senx \right\}$

$b.\quad y`` - 2k.y` + k^2 y = e^x, \qquad \left\{ y = (c_1 + c_2 x)e^{kx} + \dfrac{e^x}{(k-1)^2} \right\}$

$c.\quad y`` - 3y` + 2y = 0, \qquad \left\{ y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \right\}$

$d.\quad y` + 3y = 0, \qquad \left\{ y = ce^{-3x} \right\}$

$e.\quad (x - y^2 x)dx + (y - x^2 y)dy = 0, \qquad \left\{ x^2 + y^2 = x^2 y^2 + c \right\}$

3.- Hallar la solución general para las siguientes Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables.

$a.\quad xyy` - y^2 + x^3 yy` - 1 = 0$ $\qquad R: \quad \dfrac{1}{2}\ln\left|y^2 + 1\right| = \ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + C$

$b.\quad y` = x - 1 + xy - y$ $\qquad R: \quad \ln|1 + y| = \dfrac{x^2}{2} - x + C$

$c.\quad y` = (y-1)(y-2)$ $\qquad R: \quad -\ln|y-1| + \ln|y-2| = x + C$

$d.\quad xy + y`e^{x^2}.ln(y) = 0$ $\qquad R: \quad \ln^2|y| = \dfrac{1}{2}e^{-x^2} + C$

$e.\quad tg(x)cos(y) = -y`tg(y)$ $\qquad R:\ -\ln|\cos(x)| = -\dfrac{1}{Cos(y)} + C$

$f.\quad y`+ysen(x) = 0$ $\qquad R:\ y = e^{\cos x}.C$

$g.\quad L\dfrac{di}{i} + Rdt = 0$ $\qquad R:\ i = e^{-LRt}.C$

$h.\quad 2ydx + (xy+5x)dy = 0$ $\qquad R: 2\ln|x| = -y - 5\ln|y| + C$

$i.\quad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^2y^2}{1+x}$ $\qquad R: -\dfrac{1}{x} + \ln|x| - \dfrac{y^3}{3} = C$

$j.\quad y.\ln x.\dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$ $\qquad R:\ \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{1}{9}x^3 = \dfrac{y^2}{2} + 2y + \ln y + C$

$k.\quad e^y sen(2x)dx + \cos(x)\left(e^{2y} - y\right)dy = 0$ $\qquad R: -2\cos(x) = -e^y - ye^{-y} - e^{-y} + C$

$l.\quad \left(y - yx^2\right)\dfrac{dy}{dx} = (y+1)^2$ $\qquad R:\ \ln|y+1| + \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{2}\ln|1+x| - \dfrac{1}{2}\ln|1-x| + C$

$m.\quad \left(e^x + e^{-x}\right)\dfrac{dy}{dx} = y^2$ $\qquad R:\ -\dfrac{1}{y} = tg^{-1}(e^x) + C$

4.- Hallar una solución particular de la Ecuación Diferencial para la condición dada.

$a.\quad 2y^2y`= 3y - y`,\quad \{x=3,\ \ y=1\}$ $\qquad R:\ y^2 + \ln|y| = 3x - 8$

$b.\quad dp = p.ctg(\theta).d\theta,\ \{\theta = \pi/2,\ \ p=2\}$ $\qquad R:\ p = 2sen(\theta)$

$c.\quad xdy - (2x+1)e^{-y}dx = 0\quad \{x=1,\ y=2\}$ $\qquad R:\ e^y = 2x + \ln|x| + e^2 - 2$

$d.\quad (xy+x)dx + \sqrt{4+x^2}dy = 0,\quad \{x=0,\ \ y=1\}$ $\qquad R:\ \sqrt{4+x^2} = -\ln|y+1| + 2 + \ln|2|$

5.- Determine una solución a cada una de las Ecuaciones Diferenciales a continuación.

$a.\quad y`= -\dfrac{x+y}{x}$ $\qquad R:\ \ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2y}{x} + 1\right| + C$

$b.\quad (x-y)ydx - x^2dy = 0$ $\qquad R:\ x = C.e^{x/y}$

$c.\quad 3xydx + \left(2y^2 - x^2\right)dy = 0$ $\qquad R:\ 2\ln|x| = \ln|y/x| - \dfrac{3}{2}\ln\left|1 + y^2/x^2\right| + C$

$d.\quad \left(x^2 + y^2\right)dx - 2xydy = 0$ $\qquad R:\ \dfrac{1}{2}\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y}{x} + 1\right| - \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y}{x} - 1\right| + C$

$e.\quad (x-y)dx + xdy = 0$ $\qquad R:\ y = -x\ln|x| + xC$

$f.\quad x.dx + (y-2x)dy = 0$ $\qquad R:\ -\ln|x| = \ln\left|\dfrac{y}{x} - 1\right| + \dfrac{1}{\dfrac{y}{x} - 1} + C$

$g.\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{y+x}$ $\qquad R:\ -\ln|x| = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y^2}{x^2} + 1\right| + tg^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) + C$

6.- Resuelva cada una de las siguientes Ecuaciones Exactas.

$a.\quad 3y+e^{x}+(3x+\cos y).y`=0 \qquad R:\quad f(x,y)=3xy+e^{x}+seny$

$b.\quad \left(2xy^{-1}+y^{2}\right)dx+\left(2xy-x^{2}y^{-2}\right)dy=0 \qquad R:\quad f(x,y)=\dfrac{x^{2}}{y}+y^{2}x+C$

$c.\quad (seny-ysenx)dx+(x\cos y+\cos x)dy=0 \qquad R:\quad f(x,y)=xseny+y\cos x+C$

$d.\quad \dfrac{2x}{y}dx+\left(1-\dfrac{x^{2}}{y^{2}}\right)dy=0 \qquad R:\quad f(x,y)=\dfrac{x^{2}}{y}+y$

$e.\ \left(2x+e^{y}\right)dx+xe^{y}dy=0 \qquad R:\quad f(x,y)=x^{2}+xe^{y}+C$

$f.\ \left(x^{3}+xy^{2}+x^{2}\right)dx+x^{2}ydy=0 \qquad R:\quad f(x,y)=\dfrac{x^{4}}{4}+\dfrac{x^{2}y^{2}}{2}+\dfrac{x^{3}}{3}+C$

$g.\ (2y^{2}x-3)dx+(2yx^{2}+4)dy=0 \qquad R:\ y^{2}x^{2}-3x+4y=C$

$h.\ \left(y^{3}-y^{2}senx-x\right)dx+\left(3xy^{2}+2y\cos x\right)dy=0 \qquad R:\ xy^{3}+y^{2}\cos x-\dfrac{x^{2}}{2}=C$

7.- Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden.

$a.\quad y`+2y=e^{2x} \qquad R:\quad y=c_{1}e^{2x}+c_{2}e^{-2x}$

$b.\quad y`-3y=2 \qquad R:\quad y=c_{1}+c_{2}e^{3x}$

$c.\quad xy`+y+x=e^{x} \qquad R:\ xy=e^{x}+\dfrac{x^{2}}{2}+C$

$d.\quad xy`-3y=x^{5} \qquad R:\ \ln^{2}|y|=\dfrac{1}{2}e^{-x^{2}}+C$

$e.\quad xy`+(1+x)y=5 \qquad R:\ xe^{x}y=5e^{x}+C$

$f.\ xy`-y=x^{2}+x,\quad con\ \ x=1,\ y=2 \qquad R:\quad y=\dfrac{x^{2}}{3}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{7}{6x}$

$g.\ y`+2xy-e^{-x^{2}}=x,\quad con\ \ x=0,\ y=1 \qquad R:\quad y=\dfrac{1}{2}+xe^{-x^{2}}+\dfrac{e^{-x^{2}}}{2}$

$h.\quad x\dfrac{dy}{dx}+(3x+1)\,y=e^{-3x} \qquad R:\ y=e^{-3x}+\dfrac{ce^{-3x}}{x}$

$i.\quad ydx-4\left(x+y^{6}\right)dy=0 \qquad R:\ x=2y^{6}+cy^{4} \qquad Use\ \dfrac{dx}{dy}$

$j.\ ydx+\left(x+2xy^{2}-2y\right)dy=0 \qquad R:\ x=\dfrac{1}{y}+\dfrac{ce^{-y^{2}}}{y} \qquad Use\ \dfrac{dx}{dy}$

$k.\ (x+2)^{2}\dfrac{dy}{dx}=-5-8y-4xy \qquad R:\ y=\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{c}{(x+2)^{4}}$

8.- Determine la solución de las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

$a.\quad x\dfrac{dy}{dx}+y=y^{-2}$ $\qquad R:\quad x=c\left(1-y^{3}\right)^{-1/3}$

$b.\quad \dfrac{dy}{dx}=y\left(xy^{3}-1\right)$ $\qquad R:\quad x=y^{-3}-\dfrac{1}{3}-ce^{3x}$

$c.\quad \dfrac{dy}{dx}=(x+y+1)^{2}$ $\qquad R:\quad y=-x-1+tg(x-c)$

$d.\quad \dfrac{dy}{dx}=tg^{2}(x+y)$ $\qquad R:\quad x=\dfrac{1}{2}(x+y)+\dfrac{1}{4}sen(2x+2y)+C$

$e.\quad \dfrac{dy}{dx}=2+\sqrt{y-2x+3}$ $\qquad R:\quad x=2\sqrt{y-2x+3}+C$

9.- Determine la familia de curvas que tienen trayectorias isogonales con:

$a.\quad y(x+c)=1\quad a\ \ 45^{o}$ $\qquad R:\quad y-2tg^{-1}y=x+c_{1}$

$b.\quad y=ce^{ax}\quad a\ \ 45^{o}$ $\qquad R:\quad y+\dfrac{2}{a}\ln\left|ay-1\right|=x+c_{1}$

10.-Determine la familia de curvas que tienen trayectorias ortogonales con:

$a.\quad y^{2}=cx^{3}$ $\qquad R:\quad 3y^{2}+2x^{2}=c_{1}$

$b.\quad xy=c$ $\qquad R:\quad \dfrac{y^{2}}{2}-\dfrac{x^{2}}{2}=c_{1}$

$c.\quad y=cx^{2}$ $\qquad R:\quad y^{2}+\dfrac{x^{2}}{2}=c_{1}$

$d.\quad x^{2}-y^{2}=c$ $\qquad R:\quad y=\dfrac{c_{1}}{x}$

$e.\quad y^{2}=cx$ $\qquad R:\quad \dfrac{y^{2}}{2}+x^{2}=c_{1}$

$f.\quad x+y=c_{1}e^{y}\quad que\ \ pasa\ \ por\quad (0,\,5)$

$R:\quad y=-x+2+3e^{-x}$

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO BOLÍVAR
UNIDAD DE ESTUDIOS BÁSICOS
ÁREA DE MATEMÁTICAS
MATERIA: MATEMÁTICAS IV
PROF: JOSÉ GREGORIO PÁEZ V.

UNIDAD II.
ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR
EJERCICIOS

1.- Dada la familia de soluciones para la ecuación diferencial, determine un miembro de la familia que satisfaga las condiciones iniciales.

a. $y''-y'=0 \qquad y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

$para \quad y(0)=0 \quad y \quad y'(0)=1 \qquad R: C_1=1/2 \quad C_2=-1/2$

b. $y''-2y'+2y \qquad y=C_1e^xCosx+C_2e^xsenx$

$para \quad y(0)=1 \quad y \quad y'(\pi/2)=1 \qquad R:\ C_1=1 \quad y \quad C_2=e^{-\pi/2}$

2.- Compruebe que la familia biparamétrica de funciones dadas sea la solución general de la ecuación diferencial no homogénea en el intervalo indicado

a. $y''-7y'+10y=24e^x \qquad siendo \qquad y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}+6e^x$

$en \quad (-\infty,\ +\infty)$

b. $y''-4y'+4y=2e^{2x}+4x-12 \qquad siendo \qquad y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+x^2e^{2x}+x-2$

$en \quad (-\infty,+\infty)$

3.- Determine una segunda solución en cada ecuación diferencial. Use reducción de orden.

a. $y''+5y'=0 \qquad siendo \qquad y_1=1$

$R: \qquad y_2=-\frac{1}{5}C.e^{-5x}$

b. $y''+16y=0 \qquad siendo \qquad y_1=Cos(4x)$

$R: \qquad y_2=\frac{1}{4}C.Sen(4x)$

c. $y''-y=0 \qquad siendo \qquad y_1=Cosh(x)$

$R: \qquad y_2=C.Senh(x)$

$d.\ \ 9y''-12y'+4y=0 \qquad siendo \qquad y_1=e^{2x/3}$

$R: \qquad y_2=C.xe^{2x/3}$

$e.\ \ xy''+y'=0 \qquad siendo\ \ y_1=ln(x)$

$R: \qquad y_2=C$

4.- Determine la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales.

$a.\ \ y''+9y=0$

$R: y=C_1Cos(3x)+C_2Sen(3x)$

$b.\ \ y''+8y'+16y=0$

$R:\ y=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}$

$c.\ \ 3y''+2y'+y=0$

$$R:\ \ y=e^{-x/3}\left[C_1Cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)+C_2Sen\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)\right]$$

$d.\ \ y'''-4y''-5y'=0$

$R: y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{5x}$

$e.\ \ y'''-y=0$

$$R:\ \ y=C_1e^{x}+e^{-x/2}\left[C_2Cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_3Sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$

$f.\ \ 16y^{iv}+24y''+9y=0$

$$R:\ \ y=C_1Cos\left(\sqrt{\frac{24}{32}}x\right)+C_2xCos\left(\sqrt{\frac{24}{32}}x\right)+C_3Sen\left(\sqrt{\frac{24}{32}}x\right)+C_4xSen\left(\sqrt{\frac{24}{32}}x\right)$$

$g.\ \ y^{v}-16y'=0$

$R:\ \ y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}+C_4Cos(2x)+C_5Sen(2x)$

$h.\ \ y^{v}+5y^{iv}-2y'''-10y''+y'+5y=0$

$R:\ \ y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3e^{-x}+C_4xe^{-x}+C_5e^{-5x}$

5.- Resuelva las siguientes ecuaciones:

$a.\quad y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$

$R: \quad y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} + \frac{6}{5}x + \frac{3}{5}$

$b.\quad y'' + 3y = -48x^2 e^{3x}$

$R: \quad y = C_1 Cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 Sen\left(\sqrt{3}x\right) + e^{3x}(-4x^2 + 4x - 4/3)$

$c.\quad y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$

$R: \quad y = C_1 e^{x/2} + C_2 x e^{x/2} + 12 + \frac{1}{2}x^2 e^{x/2}$

$d.\quad y'' + 2y' + y = Sen(x) + 3Cos(2x)$

$R: \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - \frac{1}{2}Cos(x) - \frac{9}{25}Cos(2x) + \frac{36}{75}Sen(2x)$

$e.\quad y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$

$R: \quad y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x - x - 3 - \frac{2}{3}x^3 e^x$

$f.\quad y^{iv} + 2y'' + y = (x-1)^2$

$R: \quad y = C_1 Cos(x) + C_2 x Cos(x) + C_3 Sen(x) + C_4 x Sen(x) + x^2 - 2x - 3$

$g.\quad y'' + 4y = -2, \quad sujeta\ a \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

$R: \quad y = -Cos(2x) + Sen(2x) - 1/2$

6.- Encuentre la solución general de:

a. $\quad y'' + 6y' + 9y = -xe^{4x}$

$R: \quad y = \frac{2}{343}e^{4x} - \frac{1}{49}xe^{4x} + C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

$b.\quad y'' - y = x^2 e^x + 5$

$R: \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - 5 + \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{4}x^2 e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x$

c. $y'' - 2y' + 5y = e^x.Sen(x)$

$R:\qquad y = e^x\left[C_1Cos(2x) + C_2Sen(2x)\right] + \frac{1}{3}e^xSen(x)$

$d.\quad y'' + y' + y = x.Sen(x)$

$R:\qquad y = e^{-x/2}\left[C_1Cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2Sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + 2Cos(x) + Sen(x) - xCos(x)$

$e.\ \ y''' + 8y'' = -6x^2 + 9x + 2$

$R:\qquad y = C_1 + C_2x + C_3e^{-8x} + \frac{11}{256}x^2 + \frac{168}{768}x^3 - \frac{1}{16}x^4$

$f.\ y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$

$R:\qquad y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x - 13 + x + \frac{1}{6}x^3e^x$

$g.\quad y^{iv} - 2y''' + y'' = e^x + 1$

$R:\qquad y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2e^x$

$h.\quad y'' - 64y = 16 \qquad sujeta\ \ a \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

$R:\qquad y = -\frac{1}{4} + \frac{5}{8}e^{8x} + \frac{5}{8}e^{-8x}$

7. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a. $y'' + y = Sec(x)$

$R:\qquad y = C_1Cos(x) + C_2Sen(x) + Cos(x)\ln\left|Cos(x)\right| + xSen(x)$

$b.\quad y'' + y = Cos^2x$

$R:\qquad y = C_1Cos(x) + C_2Sen(x) + \frac{1}{3}Cos^4x + Sen^2x - \frac{1}{3}Sen^4x$

$c.\quad y'' - y = Cosh(x)$

$R:\qquad y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xSenh(x)$

$d.\quad y''+3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^x}$

$R:\quad y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+e^{-2x}\ln\left|1+e^x\right|+e^{-x}\ln\left|1+e^x\right|$

$e.\quad y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{1+x^2}$

$R:\quad y=C_1e^x+C_2xe^x-\dfrac{1}{2}e^x\ln\left|1+x^2\right|+xe^xtg^{-1}(x)$

$f.\quad 3y''-6y'+30y=e^xtg(3x)$

$R:\quad y=e^x\left[C_1Cos(3x)+C_2Sen(3x)\right]-\dfrac{1}{27}e^xCos(3x)\ln\left|Sec(3x)+tg(3x)\right|$

$g.\quad 4y''-y=xe^{x/2}\quad sujeta\ a\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

$R:\quad y=\dfrac{3}{2}e^{x/2}-\dfrac{1}{2}e^{-x/2}-xe^{x/2}+\dfrac{1}{2}x^2e^{x/2}$

$h.\quad x^3y'''-6y=0$

$R:\quad y=x^3+C_1Cos\left(\sqrt{2}\ln(x)\right)+C_2Sen\left(\sqrt{2}\ln(x)\right)$

$i.\quad xy^{iv}+6y'''=0$

$R:\quad y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^{-3}$

$j.\quad x^2y''+xy'+y=0\quad sujeta\ a\quad y(1)=1,\quad y'(1)=2$

$R:\quad y=Cos(\ln x)+2Sen(\ln x)$

8. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

a.
$$\frac{dx}{dt}=2x-y$$
$$\frac{dy}{dt}=x$$

$$R:\quad y(t)=(C_1-C_2)e^t+C_2t.e^t$$
$$x(t)=C_1e^t+C_2t.e^t$$

$b.\quad x'+y=t$

$y'+x=-t$

$R:\quad y(t)=-C_1e^{t}+C_2e^{-t}+t+1$

$x(t)=C_1e^{t}+C_2e^{-t}-t-1$

$c.\quad x'+y=t$

$y'-x=-t$

$R:\quad y(t)=-C_2Cos(t)+C_1Sen(t)+t-1$

$x(t)=C_1Cos(t)+C_2Sen(t)+t+1$

$d.\quad (D^2+5)x-2y=0$

$-2x+(D^2+2)y=0$

$R:\quad x(t)=C_1Cos(t)+C_2Sen(t)+C_3Cos\left(\sqrt{6}\,t\right)+C_4Sen\left(\sqrt{6}\,t\right)$

$y(t)=2C_1Cos(t)+2C_2Sen(t)-\frac{1}{2}C_3Cos\left(\sqrt{6}\,t\right)-\frac{1}{2}C_4Sen\left(\sqrt{6}\,t\right)$

$e.\quad 2Dx+(D-1)y=t$

$Dx+\quad Dy=t^2$

$R:\quad x(t)=-C_1e^{-t}+C_2+\frac{t^3}{3}-2t^2+5t$

$y(t)=C_1e^{-t}+2t^2-5t+5$

$f.\quad x'+5x+y=0 \qquad Dado\ \ que\ \ \ x(1)=0,\ \ \ y(1)=1$

$y'-4x+y=0$

$R:\quad x(t)=e^{-3t+3}+t.e^{-3t+3}$

$y(t)=-e^{-3t+3}+2t.e^{-3t+3}$

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO BOLÍVAR
UNIDAD DE ESTUDIOS BÁSICOS
ÁREA DE MATEMÁTICAS
MATERIA: MATEMÁTICAS IV
PROF: JOSÉ GREGORIO PÁEZ V.

UNIDAD III.
TRANSFORMADA DE LAPLACE
EJERCICIOS

1.- Aplique la definición de transformada a las siguientes funciones:

a. $f(t)=\begin{cases} -1 & 0\le t<1 \\ 1, & t\ge 1 \end{cases}$ $\qquad R: \frac{1}{s}\left(2e^{-s}-1\right)$

b. $f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 1, & t\ge 1 \end{cases}$ $\qquad R: \frac{1}{s^2}\left(1-e^{-s}\right)$

c. $f(t)=\begin{cases} Sen(t), & 0\le t<\pi \\ 0, & t\ge \pi \end{cases}$ $\qquad R: \frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}$

d. $f(t)=e^{t+7}$ $\qquad R: \frac{e^7}{s-1}$

e. $f(t)=t.e^{4t}$ $\qquad R: \frac{1}{(s-4)^2}$

f. $f(t)=e^{-t}Sen(t)$ $\qquad R: \frac{1}{(s+1)^2+1}$

g. $f(t)=t.Cos(t)$ $\qquad R: \frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}$

2. Demuestre que:

a. $L\left\{Senh(kt)\right\}=\frac{k}{(s^2-k^2)}$

b. $L\left\{e^t Senh(t)\right\}=\frac{1}{2(s-2)}-\frac{1}{2s}$

3. Determine la transformada inversa de:

a. $\dfrac{(s+1)^3}{s^4}$ $\qquad R: 1+3t+\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{1}{6}t^3$

b. $\dfrac{1}{4s+1}$ $\qquad R: \dfrac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}$

c. $\dfrac{4s}{4s^2+1}$ $\qquad R: Cos(t/2)$

d. $\dfrac{2s-6}{s^2+9}$ $\qquad R: 2Cos(3t)-2Sen(3t)$

e. $\dfrac{1}{s^2+3s}$ $\qquad R: \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}e^{-3t}$

f. $\dfrac{s}{(s-2)(s-3)(s-6}$ $\qquad R: \dfrac{1}{2}e^{2t}-e^{3t}+\dfrac{1}{2}e^{6t}$

g. $\dfrac{s}{(s^2+4)(s+2)}$ $\qquad R: \dfrac{1}{4}Cos(2t)+\dfrac{1}{4}Sen(2t)-\dfrac{1}{4}e^{-2t}$

h. $\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$ $\qquad R: \dfrac{1}{3}Sen(t)-\dfrac{1}{6}Sen(2t)$

4. Aplique el teorema de traslación y de la derivada para transformar las siguientes funciones:

a. $t.e^{10t}$ $\qquad R: \dfrac{1}{(s-10)^2}$

b. $e^t.Sen(3t)$ $\qquad R: \dfrac{3}{(s-1)^2+9}$

c. $e^{5t}Senh(3t)$ $\qquad R: \dfrac{3}{(s-5)^2-9}$

$d. \quad t(e^{t}+e^{2t})^{2} \qquad R: \dfrac{1}{(s-2)^{2}}+\dfrac{2}{(s-3)^{2}}+\dfrac{1}{(s-4)^{2}}$

$e. \quad e^{-t}Sen^{2}t \qquad R: \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{s+1}{(s+1)^{2}+4}\right]$

$f. \quad Cos(2t)U(t-\pi) \qquad R: e^{-\frac{\pi}{s}}\left[\dfrac{s}{s^{2}+4}\right]$

$g. \quad t^{2}Senh(t) \qquad R: \dfrac{6s^{4}-4s^{2}-2}{(s^{2}-1)^{4}}$

$h. \quad t.e^{2t}.Sen(6t) \qquad R: \dfrac{12s-24}{\left[(s-2)^{2}+36\right]^{2}}$

5.- Aplique la transformada inversa de:

$a. \quad \dfrac{1}{(s+2)^{3}} \qquad R: \dfrac{1}{2}t^{2}e^{-2t}$

$b. \quad \dfrac{1}{s^{2}-6s+10} \qquad R: e^{3t}Sen(t)$

$c. \quad \dfrac{s}{s^{2}+4s+5} \qquad R: e^{-2t}Cos(t)-2e^{-2t}Sen(t)$

$d. \quad \dfrac{s}{(s+1)^{2}} \qquad R: e^{-t}-te^{-t}$

$e. \quad \dfrac{2s-1}{s^{2}(s+1)^{3}} \qquad R: 5-t-5e^{-t}-4te^{-t}-\dfrac{3}{2}t^{2}e^{-t}$

$f. \quad \dfrac{e^{-\pi s}}{s^{2}+1} \qquad R: Sen(t).U(t-\pi)$

6. Determine la transformada inversa de las siguientes expresiones, aplicando convolución y sus teoremas.

$$a. \quad \frac{1}{s(s+1)} \qquad R: 1-e^{-t}$$

$$b. \quad \frac{s}{\left(s^2+4\right)^2} \qquad R: \frac{1}{4}t.Sen(2t)$$

7. Determine la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$a. \quad y'-y=1, \quad y(0)=0 \qquad R: -1+e^{t}$$

$$b. \quad y'+4y=e^{-4t}, \ y(0)=2 \qquad R: te^{-4t}+2e^{-4t}$$

$$c. \ y''+5y'+4y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0 \qquad R: \frac{4}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}$$

$$d. \ y''-6y'+9y=t, \quad y(0)=0, \ y'(0)=1 \qquad R: \frac{10}{9}te^{3t}-\frac{2}{27}e^{3t}+\frac{1}{9}t+\frac{2}{27}$$

$$e. \ y''+y=Sen(t), \quad y(0)=1, \ y'(0)=-1 \qquad R: -\frac{1}{2}t.Cos(t)+Cos(t)-\frac{1}{2}Sen(t)$$

$$f. \ 2y'''+3y''-3y'-2y=e^{-t}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0, \ y''(0)=1$$

$$R: -\frac{8}{9}e^{-t/2}+\frac{1}{9}e^{-2t}+\frac{5}{18}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}$$

8. Determine f(t) en las siguientes ecuaciones:

$$a. \quad f(t)+\int_0^t f(T)dT=1 \qquad R: f(t)=e^{-t}$$

$$b. \quad f(t)=1+t-\frac{8}{3}\int_0^t (T-t)^3 f(T)dT \qquad R: \frac{3}{8}e^{2t}+\frac{1}{8}e^{-2t}+\frac{1}{2}Cos(2t)+\frac{1}{4}Sen(2t)$$

9. Determine las soluciones X(t) y Y(t) en los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

a. $x' + x = y$
$y' = 2x$

Conociendo a $x(0) = 0, \ \ y(0) = 1$

R: $X(t) = \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\, Senh\left(\frac{3}{2}t\right)$

$Y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\, Cosh\left(\frac{3}{2}t\right) - \frac{1}{12}e^{-\frac{t}{2}}\, Senh\left(\frac{3}{2}t\right)$

b. $x' - 2y = 4t$

$-4x + 2y + y' = -4t - 2$

$Conociendo\ a\ x(0) = 4, \ \ y(0) = -5$

R: $X(t) = 3e^{-4t} + e^{2t}$

$Y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t$

c. $x' = 2x - y$

$y' = -x + 2y$

Bajo las condiciones $x(0) = 2, \ y(0) = 0$

R: $X(t) = e^{t} + e^{3t}$

$Y(t) = -e^{3t} + e^{t}$

d. $x' = 3x - 2y$

$y' = 2x - 2y$

Bajo las condiciones $x(0) = 2, \ \ y(0) = 0$

R: $X(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{8}{3}e^{2t}$

$Y(t) = -\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t}$

e. $x' - y' = e^{-t}$

$2x' - 2y' - y = 8$

Conociendo $x(0) = -1, \ \ y(0) = -10$

R: $X(t) = -2 + e^{-t}$

$Y(t) = 2e^{-t} - 8$

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO BOLÍVAR
UNIDAD DE ESTUDIOS BÁSICOS
ÁREA DE MATEMÁTICAS
MATERIA: MATEMÁTICAS IV
PROF: JOSÉ GREGORIO PÁEZ V.

UNIDAD IV.
SERIES Y SUCESIONES.
EJERCICIOS

1.- Determine en las siguientes sucesiones, si es convergente o divergente:

$a.\ \left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$ $\quad R: Diverge,\ L=\infty$

$b.\ \left\{\frac{3-2n^2}{n^2-1}\right\}$ $\quad R: Converge,\ L=-2$

$c.\ \left\{\frac{\ln(n)}{n^2}\right\}$ $\quad R: Converge,\ L=0$

$d.\ \left\{\frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}\right\}$ $\quad R: Converge,\ L=1$

$e.\ \left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}\right\}$ $\quad R: Diverge,\ L=\infty$

$f.\ \left\{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n\right\}$ $\quad R: Converge,\ L=e^{1/3}$

$emplee\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

2.- Determine si las siguientes sucesiones, son monótonas o no monótonas:

a. $\left\{\dfrac{3n-1}{4n+5}\right\}$ $R:$ *Monótona creciente*

b. $\left\{\dfrac{1-2n^2}{n^2}\right\}$ $R:$ *Monótona decreciente*

c. $\left\{Cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right\}$ $R:$ *No monótona*

d. $\left\{\dfrac{1}{n+Sen\left(n^2\right)}\right\}$ $R:$ *No monótona*

e. $\left\{\dfrac{5^n}{1+5^{2n}}\right\}$ $R:$ *Monótona decreciente*

3.- Determine si $\left\{\dfrac{n^2+3}{n+1}\right\}$ es acotada o no acotada. R: No acotada.

4.- En las siguientes series halle la suma:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $R: S_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(3n+1)(3n-2)}$ $R: S_n = \dfrac{5}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+4}\right)$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ $R:\ S_n = -\ln(n+2)$

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}}$ $R:\ S_n = \dfrac{5}{2}\left(1-\dfrac{1}{5^n}\right)$

5.- Verificar si las siguientes series convergen o divergen.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ $R: Converge$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ $R: Diverge$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-5n}$ $R: Converge$

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}$ $R: Diverge$

6.- Estudie las siguientes series alternas:

$a. \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)} \qquad R: Converge$

$b. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+2} \qquad R: Converge$

$c. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n^2} \qquad R: Diverge$

$d. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} \qquad R: Converge$

7.- Determine el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencia:

$a. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \qquad R: [-1,1)$

$b. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n.x^n}{n^2} \qquad R: [-1/2,\ 1/2]$

$c. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad R: (-\infty,\ +\infty)$

$d. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} \qquad R: (0,\ 2]$

8.- Determine el dominio de f' si

$a. \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad R: Dom f'(x): [-1,\ 1)$

$b. \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n.3^n} \qquad R: Dom f'(x): (-2,\ 4)$

9.- Determine el resultado correcto a dos decimales de las siguientes integrales:

$a. \quad \int_0^1 e^{-x^2}\, dx \qquad R: 0,74$

$b. \quad \int_0^1 x.Senh\sqrt{x}\ \ dx \qquad R: 0,44$

10.- Determine por medio de series de potencia el resultado correcto, a dos decimales, de los siguientes enunciados:

$a.$	e^1	$R: 2,71$
$b.$	$tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$	$R: 0,46$